

## 「平均値が 1 となるガンマ分布を用いた 降雨減衰確率分布の統一表現」

Unification of rain attenuation distribution

using Gamma distribution when its mean value is equal to 1

佐々木 収 石田 未央 高橋 直人 吉川 誠  
NTT アドバンステクノロジー(株)

### 1. まえがき

多様な通信サービスを支える広帯域固定無線の通信手段として準ミリ波～ミリ波帯を用いたエントランス方式や FWA ( Fixed Wireless Access ) 方式がある。準ミリ波以上の周波数帯を用いた無線方式では降雨により回線品質が劣化するため、降雨減衰を初めとした降雨時伝搬特性の評価が方式実用化上大きな課題となる。その中でも回線信頼度に直接結びつく降雨減衰確率分布について精度の高い計算法を構築することが特に重要である。

降雨減衰確率分布は、周波数に規定される単位距離当りの減衰量 ( 降雨減衰係数 ) , 伝搬距離, 降雨強度確率分布等から求められる。このうち最も基本となる降雨強度確率分布については、確率分布形をガンマ分布<sup>1)</sup>, 対数正規分布<sup>2)</sup>, M 分布<sup>3)</sup>, 条件付 M 分布<sup>4)</sup>等とした時の計算法が提案されている。これらの確率分布形を用いて降雨減衰分布を具体的に求めるには、計算式が積分表示となる、確率分布に用いられているパラメータの導出方法が明確でない等の問題が残っており、高精度で簡易な計算法とはなっていない。一方、降雨が問題となる周波数帯における国内方式の回線設計法では 11/15GHz 帯及び 20GHz 帯さらに 18GHz 帯に降雨減衰分布を計算する式<sup>5)</sup>があり、それぞれ多項式によって任意時間率での降雨減衰量が計算できるが、その根拠となる考え方や使用したパラメータの算出方法が明確でなく新しく対象とする周波数や無線方式に拡張することを困難にしている。

こうした観点から本稿では、近年降雨強度の広い範囲で近似度の高い M 分布を用いて回線設計に用いる計算式が提案されている現状<sup>6)</sup>ではあるが、日本における降雨減衰研究の先駆けとして現在の回線設計法における評価式の基本であり、また 2 変量の同時確率密度関数<sup>7)</sup>が提示されているために降雨減衰の 2 区間同時確率分布や隣接する区間からの降雨減衰差確率分布の計算が可能となる点で優れるガンマ分布を取り上げ、ガンマ分布の中で平均値が 1 となる場合の確率分布<sup>8)</sup>を用いて降雨減衰分布を統一的に表現する方法を検討している。その過程で国内の降雨領域無線方式の回線設計に用いられている降雨減衰分布の計算がガンマ分布を基本としていることを踏まえ、ここで用いられている各計算パラメータについて物理的意味を明らかにすると共に、多項式近似式等で表されている各計算式について、式の導出に用いられたパラメータの値を推定している。

## 2. 降雨減衰分布検討の前提

### 2.1 実測された降雨減衰分布例

降雨減衰確率分布の測定例を図1に示す<sup>10)</sup>。この図は東京都内の距離約9kmの回線において周波数15GHz帯を用いて測定した降雨減衰の強雨期2年間総合の確率分布例である。この図には、降雨減衰統計量から確率分布形をガンマ分布、対数正規分布、M分布、条件付M分布として各分布パラメータを求め推定された各確率分布も併記する。この図に示すように降雨減衰実測分布は従来から日本における回線設計で基本とされているガンマ分布に比較的よく近似できる場合も多いことが分かる。

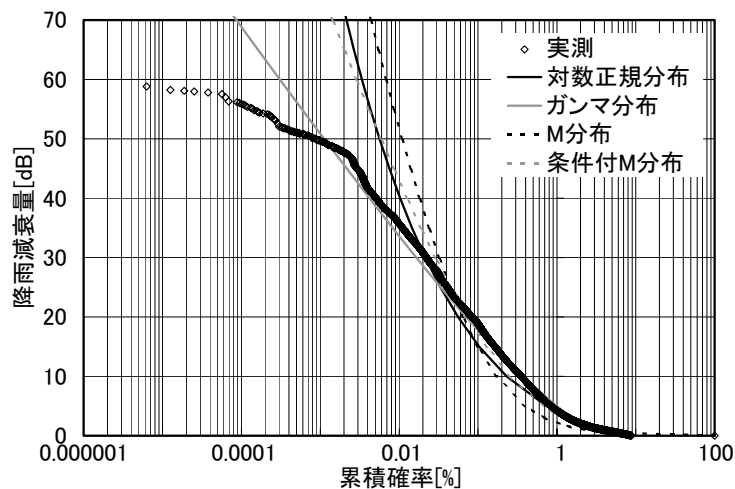


図1 ガンマ分布近似降雨減衰確率分布の測定例

### 2.2 検討の前提条件

本稿において降雨減衰分布を検討するための前提は以下の通りである。

- 1) 回線毎の降雨減衰分布評価の基本となる降雨設計値としては、電波法関係審査基準で用いられている強雨期3ヶ月の降雨強度分布の0.0075%値を用いる。
- 2) 降雨減衰分布計算の基本となる降雨強度分布は1分積分値で表現する。
- 3) 回線品質規格は不稼働時間率で表され、その時間単位は年間時間率で与える。
- 4) 従って強雨期で与えられた降雨設計値から年間の降雨強度確率分布を求める必要があり、それには強雨期と等価な降雨の発生する年間の月数(等価月数)を用いる

## 3. ガンマ分布降雨減衰分布の計算法<sup>1)</sup>

### 3.1 基本となる降雨強度分布

降雨減衰確率分布計算の基本となる降雨強度  $R$  の確率分布は以下に示すガンマ分布で近似できるとする。

$$F(R) = \frac{\int_0^R \beta^\nu R^{\nu-1} \exp(-\beta R) dR}{\Gamma(\nu)} \dots\dots\dots (1)$$

ここで  $\nu$  ,  $\beta$  はガンマ分布の量及び形状を表すパラメータであり、以後降雨強度分布のパラメータとして使用する。また  $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} \exp(-t) dt$  で表される。これらの分布パラメータは、降雨強度の平均値  $\mu$  及びその分散  $\sigma^2$  と以下の関係を有する。

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2, \beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \dots\dots\dots (2)$$

逆に平均値と分散はガンマ分布パラメータ  $\nu$  ,  $\beta$  と以下の関係にある。

$$\text{平均値} ; \mu = \frac{\nu}{\beta}, \text{分散} ; \sigma^2 = \frac{\nu}{\beta^2} \dots\dots\dots (3)$$

ガンマ分布近似された降雨強度分布は  $R=t$  とおくと以下の式に変形される。

$$F(R) = \frac{\int_0^R t^{\nu-1} \exp(-t) dt}{\Gamma(\nu)} = \frac{\gamma(\nu, \beta R)}{\Gamma(\nu)} \dots\dots\dots (4)$$

ここで  $\gamma(\nu, x) = \int_0^x t^{\nu-1} \exp(-t) dt$  は第 2 種不完全ガンマ関数である。

ガンマ分布近似された降雨強度分布は  $\nu$  及び  $\beta$  パラメータが分かれば確定する。これらのパラメータは降雨強度統計量から式(2)を用いて計算できるが、降雨強度の特定確率値  $R_p$  が分かる場合も平均値 1 の時 ( $\nu = 1$ ) のガンマ分布の同じ確率  $p$  での値  $S_p$  ( )を用いて以下のように計算できるので確率分布が確定する。

$$\beta = \nu \cdot S_p(\nu) / R_p \dots\dots\dots (5)$$

この特定確率値は日本では強雨期 3 ヶ月の約 10 分間に対応する強雨期 0.0075% 値が用いられ、降雨設計値として日本全国の主な地点での値が求められている<sup>1),5)</sup>。

### 3.2 ガンマ分布による $R^n$ 確率分布の導出

単位距離当りの降雨減衰量  $L$  は降雨減衰係数と呼ばれ、 $n$  を降雨減衰係数パラメータとすれば  $L = R^n$  で表される。ここで  $n$  は周波数と偏波によって決まるパラメータであり、例えば日本の場合は小口により Laws & Parsons の雨滴粒度分布と球形雨滴を仮定して 4GHz ~ 100GHz の 17 周波数において求められた降雨減衰量計算結果<sup>10)</sup>に基づき導出されている<sup>1)</sup>。このように降雨減衰は  $R^n$  に比例するので降雨減衰分布を求めるには  $R^n$  の確率分布を計算する必要がある。降雨強度分布がガンマ分布する時、 $R^n(X)$  の分布もガンマ分布で近似できると言われており<sup>1)</sup>、この場合  $X$  の確率分布は降雨強度の場合と同じく以下の式で表される。

$$F(X) = \frac{\int_0^{\infty} \beta_X^{\nu_X} X^{\nu_X-1} \exp(-\beta_X X) dX}{\Gamma(\nu_X)} \dots\dots\dots (6)$$

ここで  $\nu_X, \beta_X$  はガンマ分布で近似された  $R^n$  分布のパラメータであり、 $R^n$  分布は式(4)の降雨強度分布と同じく以下の式で計算できる。

$$F(X) = \frac{\gamma(\nu_X, \beta_X X)}{\Gamma(\nu_X)} \dots\dots\dots (7)$$

ガンマ分布する  $R^n$  分布のパラメータは降雨強度分布のパラメータ  $\nu, \beta$  より解析的に以下の式で求められる。

$$\nu_X = \frac{\left\{ \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} \right\}^2}{\frac{\Gamma(\nu+2n)}{\Gamma(\nu)} - \left\{ \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} \right\}^2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\beta_X = \beta^n \frac{\left\{ \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} \right\}^2}{\frac{\Gamma(\nu+2n)}{\Gamma(\nu)} - \left\{ \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} \right\}^2}$$

$R^n$  分布の平均値  $\mu_X$ , 分散  $\sigma_X^2$  は  $R^n$  分布のパラメータ  $\nu_X, \beta_X$  より次式で表される。

$$\text{平均値 ; } \mu_X = \frac{\nu_X}{\beta_X}, \quad \text{分散 ; } \sigma_X^2 = \frac{\nu_X}{\beta_X^2} \dots\dots\dots (9)$$

降雨強度  $R$  の分布パラメータ  $\nu, \beta$  と  $R^n$  分布のパラメータ  $\nu_X, \beta_X$  との関係は式(8)より  $n$  をパラメータとして図 2 に示す通りとなる。この図より  $\nu_X$  と  $\nu$  の関係はほぼ比例関係となり以下の多項式で近似される。

$$\nu_X = (6.6427 - 10.72 \cdot n + 6.4996 \cdot n^2 - 1.4228 \cdot n^3) \times \nu \dots\dots\dots (10)$$

( 0.9  $n$  1.4 )

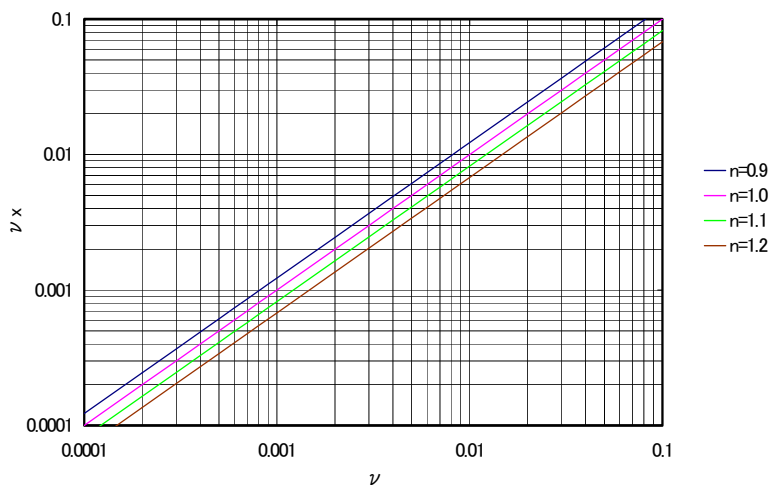


図 2 降雨強度  $R$  分布のパラメータ  $\nu, \beta$  と  $R^n$  分布のパラメータ  $\nu_X, \beta_X$  の関係

### 3.3 ガンマ分布近似された積分雨量分布

降雨減衰量  $Z$  は先に示した単位距離当りの降雨減衰量を降雨状況に対応して距離に沿って積分することにより求められるので、 $R^n$  の積分雨量を用いて次式で計算できる。

$$Z = \gamma \int_0^D R(x)^n dx \equiv \gamma Y \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $Y$  は伝搬路に沿った  $R^n$  の積分雨量、 $R(x)$  は伝搬路上各点での降雨強度、 $n$  は降雨減衰係数パラメータ、 $D$  は距離を表す。これより降雨減衰分布を求めるには降雨強度の  $n$  乗の空間的变化を示す降雨空間相関が必要になることが分かる。降雨強度  $n$  乗の空間相関は一般的に降雨強度と同じく  $\rho_R(x) = \exp(-\alpha x^\delta)$  の指数型で表されると考えられている<sup>14)</sup>。

$R^n$  の積分雨量  $Y$  の統計量については細分化された伝搬路各地点での時間的にみた降雨強度の平均値と分散とが等しいならば、 $Y$  の平均値、分散が以下の式で求められる。

$$\text{平均値；} \quad \mu_Y = \mu_X \cdot D \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{分散；} \\ \sigma_Y^2 = \left\{ 2D \int_0^D \rho_R(x) dx + 2 \int_0^D x \rho_R(x) dx \right\} \sigma_X^2 = G(\alpha, \delta, D) \sigma_X^2 \dots\dots\dots (13)$$

降雨強度分布がガンマ分布する時  $X$  及び積分雨量  $Y$  の分布ともにガンマ分布で近似できると考えてよいので、式(12)、式(13)の  $Y$  の統計量を用いて  $Y$  の分布パラメータ  $\nu_Y, \beta_Y$  は以下のように計算できる。

$$\nu_Y = \left( \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 = \frac{\mu_X^2 D^2}{G(\alpha, \delta, D) \sigma_X^2} = \left( \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \frac{D^2}{G(\alpha, \delta, D)} = \frac{\nu_X D^2}{G(\alpha, \delta, D)} \quad (14)$$

$$\beta_Y = \frac{\mu_Y}{\sigma_Y^2} = \frac{\mu_X D}{G(\alpha, \delta, D) \sigma_X^2} = \left( \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right) \frac{D}{G(\alpha, \delta, D)} = \frac{\beta_X D}{G(\alpha, \delta, D)} \dots\dots (15)$$

このように降雨強度分布がガンマ分布で表される時、積分雨量分布は同じくガンマ分布で近似でき、そのパラメータは降雨強度分布または降雨強度の  $n$  乗分布のパラメータと降雨減衰係数パラメータ、降雨空間相関パラメータから計算できる。

### 3.4 降雨空間相関パラメータ

降雨空間相関を示すパラメータ  $G(\alpha, \delta, D)$  は代表的な降雨強度  $n$  乗の空間相関関数として  $\delta = 1, 0.5$  の場合について以下のように計算できる。

$\rho_R(x) = \exp(-\alpha D)$  の時

$$G(\alpha, 1, D) = \frac{2(\alpha D - 1 + e^{-\alpha D})}{\alpha^2} \dots\dots\dots (16)$$

$\rho_R(x) = \exp(-\alpha \sqrt{D})$  の時

$$G(\alpha, 0.5, D) = \frac{4}{\alpha^2} \left[ D + 2e^{-\alpha\sqrt{D}} \left\{ D + \frac{3}{\alpha} \left( \sqrt{D} + \frac{1}{\alpha} \right) \right\} - \frac{6}{\alpha^2} \right] \dots\dots\dots (17)$$

降雨強度空間相関関数の代表的な例と、その時の  $G(\alpha, \delta, D)$  の値とを図 3 に示す。

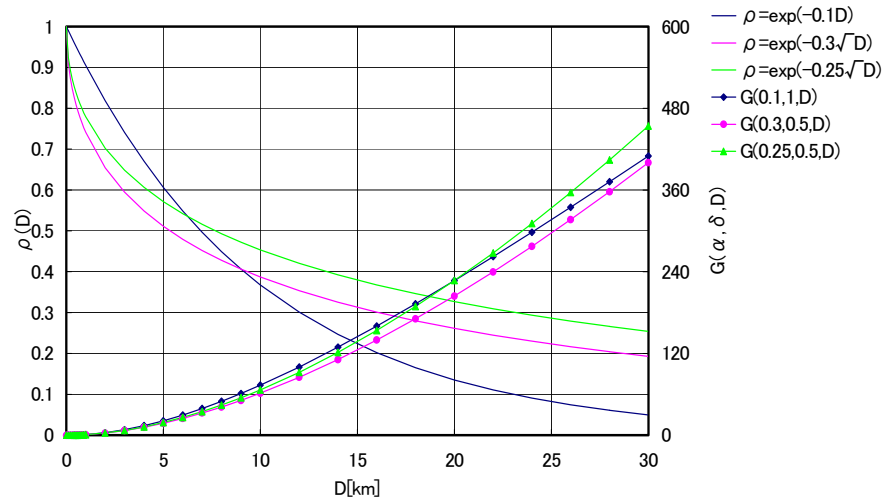


図 3 降雨強度空間相関の距離特性と G パラメータ

これより  $G(\alpha, \delta, D)$  では距離が約 10km を超えると降雨空間相関の影響が大きくなっていくことが分かる。なお、降雨強度の  $n$  乗の場合も  $G$  の値が異なるだけで同様に扱うことができる。

### 3.5 ガンマ分布近似された降雨減衰分布

降雨減衰量  $Z$  は式 (11) に示すように、積分雨量  $Y$  に定数  $\gamma$  を乗じて求められるので、降雨減衰量  $Z$  の平均値、分散は以下の式で求められる。

$$\text{平均； } \mu_Z = \gamma \cdot \mu_Y, \quad \text{標準偏差； } \sigma_Z^2 = \gamma^2 \cdot \sigma_Y^2 \dots\dots\dots (18)$$

確率分布も  $Y$  と同じガンマ分布で計算され、そのパラメータは以下の式となる。

$$\nu_Z = \left( \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 = \left( \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 = \nu_Y \dots\dots\dots (19)$$

$$\beta_Z = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z^2} = \frac{\gamma \mu_Y}{\gamma^2 \sigma_Y^2} = \frac{\beta_Y}{\gamma} \dots\dots\dots (20)$$

図 4 に式 (14) に基き  $R^n$  のパラメータ  $x$  と降雨減衰分布のパラメータ  $z (= y)$  との関係を表す代表的な降雨空間相関で距離 10km の場合について示す。

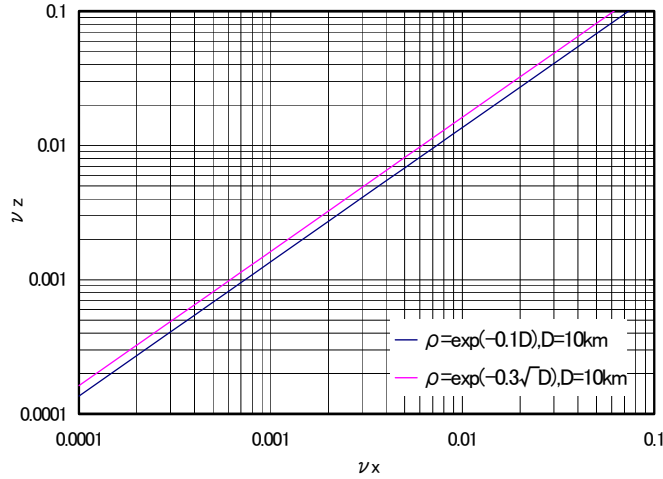


図4  $R^n$  のパラメータ  $x$  と降雨減衰のパラメータ  $z$  の関係

このように降雨減衰分布のパラメータ  $z$ ,  $\nu_z$  が降雨強度分布のパラメータ等から求められるので、降雨減衰分布は式(4)、式(6)と同じく次式で計算できる。

$$F(z) = \frac{\int_z^{\infty} \beta_z^{\nu_z} Z^{\nu_z-1} e^{-\beta_z Z} dZ}{\Gamma(\nu_z)} = \frac{\gamma(\nu_z, \beta_z z)}{\Gamma(\nu_z)} \dots\dots\dots (21)$$

#### 4. 降雨減衰分布の近似計算法

##### 4.1 降雨減衰分布の直接近似法

式(21)に示した降雨減衰分布を計算において  $\frac{1}{\Gamma(\nu_z)}$  は以下の式で簡単に表現される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\nu_z)} &= \frac{\nu_z}{\Gamma(\nu_z + 1)} \\ &= \frac{\nu_z}{1 - 0.57719\nu_z + 0.9882\nu_z^2 - 0.89705\nu_z^3 + \dots} \dots\dots\dots (22) \\ &= \frac{\nu_z}{1 - 0.5772\nu_z + 0.99\nu_z^2 - 0.9\nu_z^3} \end{aligned}$$

降雨減衰分布の  $z$  パラメータは対象となる降雨、伝搬路条件で  $z < 0.04$  程度と考えてよく、この時以下のように近似してもよい。

$$\frac{1}{\Gamma(\nu_z)} \approx \nu_z \dots\dots\dots (23)$$

一方分子に用いられる第2種不完全ガンマ関数は以下の如く近似できる。

$$\begin{aligned} \gamma(\nu_z, \beta_z z) &= (\beta_z z)^{\nu_z-1} e^{-\beta_z z} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_z - 1)(\nu_z - 2) \dots (\nu_z - Z)}{(\beta_z z)^n} \right\} \\ &= \frac{1}{(\beta_z z)^{1-\nu_z} e^{\beta_z z}} \left\{ 1 - \frac{\beta_z z + 2}{(\beta_z z)^2 + 4(\beta_z z) + 2} \right\} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここで  $\beta_Z$  による和は、 $Z = 0$  として近似計算したものである。  
 その結果、降雨減衰分布は以下の式で近似できると考えてよい。

$$F(Z) = \frac{v_Z}{(\beta_Z Z)^{1-v_Z} e^{\beta_Z Z}} \cdot \frac{(\beta_Z Z)^2 + 3(\beta_Z Z)}{(\beta_Z Z)^2 + 4(\beta_Z Z) + 2} \dots\dots\dots (25)$$

$$= \frac{v_Z}{(\beta_Z Z)^{-v_Z} e^{\beta_Z Z}} \cdot \frac{(\beta_Z Z) + 3}{(\beta_Z Z)^2 + 4(\beta_Z Z) + 2}$$

これにより、 $v_Z$ 、 $\beta_Z$  が式(14)、式(15)等に示されるように降雨強度分布のパラメータ、降雨統計量、降雨空間相関関数から求められるので降雨減衰分布が計算できる。

#### 4.2 平均値 1 のガンマ分布の多項式近似式

平均値が 1、即ちガンマ分布のパラメータ  $v = 1$  におけるガンマ分布は式(5)で用いたように降雨減衰分布を簡易に求めるために有効である。 $v = 1$  における確率  $p\%$  におけるガンマ分布の値を  $S_p(v)$  とすれば、確率  $p$  と以下の関係がある。

$$p = \frac{\int_0^\infty v^v Z^{v-1} e^{-vZ} dZ}{\Gamma(v)} \dots\dots\dots (26)$$

$S_p(v)$  については従来特定確率においてパラメータ  $v$  に対する多項式近似が以下に示すように与えられていた<sup>8)</sup>。

$$\log S_p(v) = \sum_{i=0}^5 k_i (\log v)^i \dots\dots\dots (27)$$

ここで  $k_i$  は特定確率において定数で与えられていたが、任意の確率においても  $S_p(v)$  の計算が可能となるよう  $k_i$  を確率  $p$  に対する多項式近似式として以下に示すように導出した。

$$k_i = \sum_{j=0}^6 m_{ij} (\log p)^j \dots\dots\dots (28)$$

ここで  $m_{ij}$  は表 1 に示す定数である。図 5 に式(27)、式(28)から計算された代表的な  $v$  についての確率  $p$  と  $S_p(v)$  との関係を示す。

表 1  $(\log v)^i$  の係数表

$m_{ij}$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	0.78164	8.8244E-03	0.12964	0.063822	0.015606	1.9466E-03	9.8268E-05
$i=1$	0.20057	1.4629	1.0777	0.44065	0.1009	0.012142	5.9796E-04
$i=2$	1.5655	2.6864	2.1134	0.88121	0.20345	0.024588	1.2141E-03
$i=3$	1.3964	2.4845	1.9451	0.80826	0.18626	0.022488	1.1098E-03
$i=4$	0.55672	1.0192	0.8	0.3326	0.076657	9.2559E-03	4.5685E-04
$i=5$	0.089769	0.16391	0.1277	0.05284	0.012141	1.4629E-03	7.21E-05



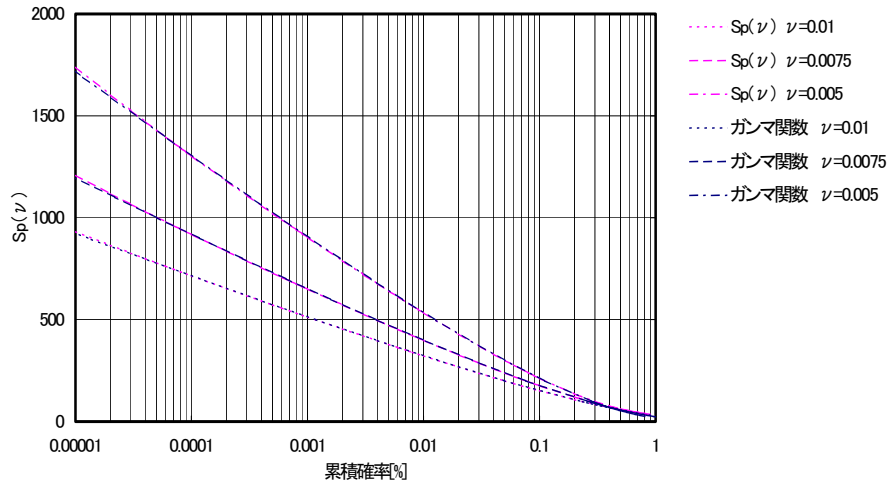


図5  $p$  と  $S_p(\ )$  の関係

この図にはガンマ関数を直接積分した時の厳密計算結果も併記する。この図より、 $S_p(\ )$  の近似多項式を用いた計算結果と厳密計算による結果とが殆ど一致することが分かる。

#### 4.3 平均値1のガンマ分布を用いた降雨減衰分布の導出

ガンマ分布の  $p\%$  値は、平均値1のガンマ分布  $S_p(\ )$  を用いれば例えば降雨減衰分布の場合以下の式で表される。

$$Z_p = \frac{V_Z}{\beta_Z} S_p(V_Z) \dots\dots\dots (29)$$

これより、降雨強度の統計量から算出した降雨強度分布のガンマ分布パラメータから降雨減衰分布パラメータを求め、式(27)、式(28)より算出される  $S_p(\ )$  を用いる事により、式(29)から任意の確率における降雨減衰量を算出できる。

#### 5. 平均値1のガンマ分布を用いた降雨減衰分布の統一表現

##### 5.1 一様降雨補正係数 $K_p$ の定式化

任意の時間率における降雨減衰量を求める計算方法を以下に示す。距離  $D$  における降雨減衰量は一般的に式(11)で計算できた。この式は単位距離当りの降雨減衰量(降雨減衰係数)に距離を乗じた式を基本として以下の式に変形できる。

$$Z_p = \gamma \int_0^D R(x)^n dx \Big|_p = \gamma R_p^n D \frac{\int_0^D R(x)^n dx}{\gamma R_p^n D} \dots\dots\dots (30)$$

$$\equiv \gamma K_p R_p^n D$$

$$K_p = \frac{\int_0^D R(x)^n dx}{\gamma R_p^n D} = \frac{Y_p}{D \cdot X_p} \dots\dots\dots (31)$$

ここで  $K_p$  は一様降雨補正係数で、降雨が伝搬路に沿って一様でない効果を表すパラメータであり、伝搬路に沿って変化する降雨強度をそのまま積分して得られる降雨強度（積分雨量）による減衰量と伝搬路に沿って一様に降雨が降っていたと仮定して計算される降雨減衰量との確率  $p$  における比によって求められる。

ここで  $X_p$  は  $R^n$  の  $p\%$  値、 $Y_p$  は積分雨量の  $p\%$  値を示し、それぞれ先の  $S_p(\ )$  を用いて以下の式で表される。

$$X_p = \frac{S_p(v_X)v_X}{\beta_X} = S_p(v_X)\mu_X \dots\dots\dots (32)$$

$$Y_p = \frac{S_p(v_Y)v_Y}{\beta_Y} = S_p(v_Y)\mu_Y = S_p(v_Y)D\mu_X \dots\dots\dots (33)$$

従って  $K_p$  は以下のように変換される<sup>1)</sup>。

$$K_p = \frac{Y_p}{D \cdot X_p} = \frac{S_p(v_Y)D\mu_X}{DS_p(v_X)\mu_X} = \frac{S_p(v_Y)}{S_p(v_X)} \dots\dots\dots (34)$$

これより、 $K_p$  は平均値が 1 のガンマ分布の相対値を用いて表せる事が示された。なお、 $v_Y$  は式 (14) に示すように  $v_Y = \frac{D^2 v_X}{G(\alpha, \delta, D)}$  となる。図 6 に代表的な降雨強度相関関数を与

えた時の一様降雨補正係数の計算結果例を示す。  $\nu = 0.005, 0.0075, 0.01$  の場合と降雨空間相関が  $r = \exp(-0.1D)$  及び  $r = \exp(-0.3\sqrt{D})$  の場合について、 $p = 0.001\%$  における計算結果を示している。この図を含むパラメータを変えた時の計算結果によれば確率が余り大きくない領域ではパラメータの影響は少なく、 $K_p$  の計算結果の差異は主に降雨空間相関によるものであることが分かる。特に、降雨強度空間相関関数のパラメータの影響を強く受ける傾向にあることが分かる。

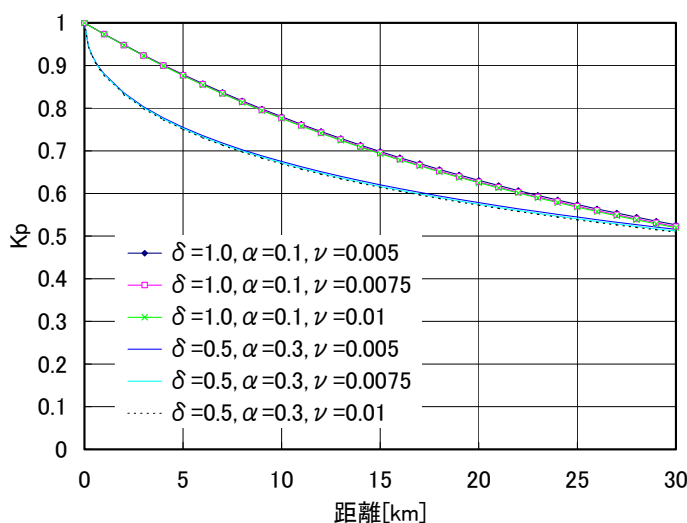


図 6 一様降雨補正の距離特性(p=0.001%)

## 5.2 ガンマ分布形状関数の定式化

確率  $p$  における降雨減衰量を求める式(30)はまた以下に示すように変形できる。

$$Z_p = \gamma R_p^n K_p D = \gamma K_p R_0^n \left( \frac{R_p^n}{R_0^n} \right) D \equiv \gamma K_p R_0^n \Gamma_p D \dots\dots\dots (35)$$

ここで  $R_0$  は降雨設計値、 $\Gamma_p = \left( \frac{R_p^n}{R_0^n} \right)$  は降雨設計値の確率値で規格化された相対値であ

り、ガンマ分布で表される確率分布の形状を表す関数<sup>12)</sup>となる。降雨設計値は強雨期 3 ヶ月の 0.0075% 値としているので、これをそのまま用いる場合には強雨期の形状関数となる。現在の回線設計では年間の不稼働率で評価されるので、年間における形状関数は一般的に強雨期と等価な月数を年間  $M$  ヶ月とすれば年間の確率は強雨期の確率の  $(M/12)$  倍となるので、次式で表される<sup>13)</sup>。

$$\Gamma_p = \left( \frac{R_{p/M}^{12}}{R_{0.0075}^n} \right) = \frac{\frac{v_X}{\beta_X} S_{p/M}^{12}(v_X)}{\frac{v_X}{\beta_X} S_{0.0075}(v_X)} = \frac{S_{p/M}^{12}(v_X)}{S_{0.0075}(v_X)} \dots\dots\dots (36)$$

これよりガンマ分布近似された降雨減衰分布の形状関数も平均値 1 で規格化されたガンマ分布を用いて表されることがわかる。

## 5.3 平均値 1 のガンマ分布を用いた任意確率降雨減衰量

以上を総合すると年間の任意時間率での降雨減衰量は強雨期 3 ヶ月と等価な月数を  $M$  として以下に示すように降雨減衰分布のガンマ分布パラメータ  $z (= y)$  と平均値 1 の時のガンマ分布相対値  $S_p(x)$  によって計算する事ができる<sup>13)</sup>。

$$\begin{aligned} Z_p &= \gamma R_0^n K_p \Gamma_p D \\ &= \gamma R_0^n \cdot \frac{S_{p/M}^{12}(v_Y)}{S_{p/M}^{12}(v_X)} \cdot \frac{S_{p/M}^{12}(v_X)}{S_{0.0075}(v_X)} D = \gamma R_0^n D \frac{S_{p/M}^{12}(v_Y)}{S_{0.0075}(v_X)} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

## 5.4 近似計算結果の検証

ガンマ分布に基づく降雨減衰分布について、式(25)により任意の降雨減衰量からの時間率が求められ、式(37)により任意の時間率からの降雨減衰量が求められることが分った。このうち既存の降雨設計値は強雨期における値であるので、降雨強度分布のガンマ分布パラメータも強雨期分布での値となる。従って回線規格に対応した年間の降雨減衰分布を求める場合には等価月数  $M$  の時式(25)に  $(M/12)$  を乗じる必要がある。

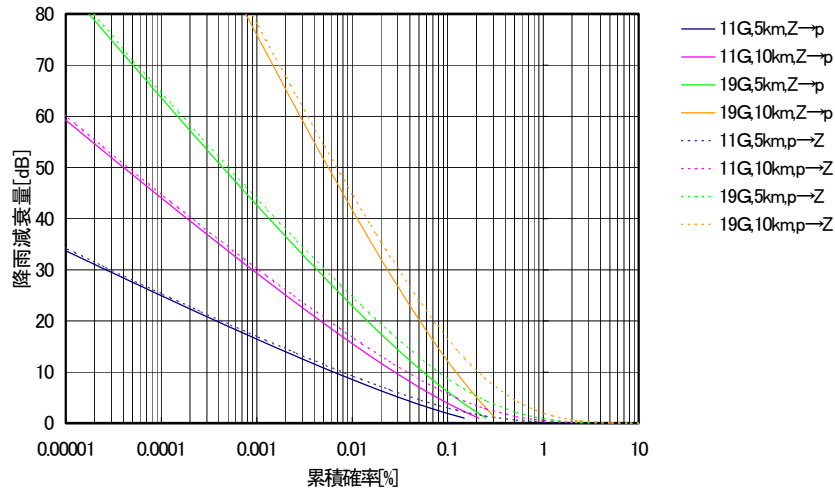


図7 降雨減衰分布の推定結果の比較

図7に上記2つの方法を用いた降雨減衰分布の推定結果の比較を示す。ここでは強雨期における降雨強度分布の形状パラメータ  $\gamma = 0.013$ 、降雨設計値  $R_0 = 1.5$  [mm/min]、等価月数  $M=3$  として周波数は11GHz帯と19GHz帯で、距離5kmと10kmの場合について計算している。これらの図より、式表現は全く異なるが計算条件を同じとすれば両推定法の計算結果がほぼ一致することが確認できる。

6. 審査基準降雨減衰分布簡易計算法との差異

6.1 審査基準簡易計算法の概要<sup>5)</sup>

6.1.1 電気通信用11/15GHz帯デジタル方式

現在審査基準で用いられているガンマ分布を基本とした降雨減衰分布の計算方法には電気通信用の11/15GHz帯と20GHz帯とがあり、共に確率から減衰量を求める方法である。このうち電気通信用11/15GHz帯デジタル方式では降雨減衰量  $Z$  の分布における累積確率  $p\%$  値  $Z_p$  は次式で表している。

$$Z_p = \gamma \cdot R_0^n \cdot \Gamma_p \cdot D \cdot C_p \cdot K_p \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $R_0$ は降雨設計値で1分降雨強度の強雨期の0.0075%値、 $\gamma$ 、 $n$ は降雨減衰係数パラメータ、 $D$ は伝搬距離[km]であり、 $\Gamma_p$ はガンマ分布の $p\%$ を0.0075%値で正規化した値となり、本論文ではガンマ分布形状関数と定義したパラメータであるが、審査基準では以下の式で計算している。ここで $\Gamma_p$ が0.0075%値で正規化した式としていることは結果的に強雨期の確率分布を求めていることになり、年間分布とした場合には強雨期と等価な月数を12ヶ月としたことに対応する。

$$\Gamma_p = 7.102406 \cdot 10^{-3} - 3.8465364 \cdot 10^{-1} \cdot s + 4.5883133 \cdot 10^{-2} \cdot s^2 + 3.2882329 \cdot 10^{-3} \cdot s^3$$

$$s = \log p \quad (0.00001\% \leq p \leq 0.1\%) \dots\dots\dots (39)$$

また  $K_p$  は一様降雨補正係数として以下の式で与えられている。

$$K_p = \exp(-a \cdot D^b) \quad (0\text{km} \leq D \leq 30\text{km}, 0.001\% \leq p \leq 0.1\%) \dots\dots\dots (40)$$

$$a = 3.54789 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{\left(\frac{0.280409}{\log p}\right)} \quad (0\text{km} \leq D < 15\text{km})$$

$$a = 4.92856 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{\left(\frac{0.315439}{\log p}\right)} \quad (15\text{km} \leq D \leq 30\text{km})$$

$$b = 0.93974 - 3.1846 \cdot 10^{-2} / \log p \quad (0\text{km} \leq D < 15\text{km})$$

$$b = 0.81364 - 6.2562 \cdot 10^{-2} / \log p \quad (15\text{km} \leq D \leq 30\text{km})$$

最後に  $C_p$  は計算値の分布と実際の分布が一致しないための補正係数であり、これは理論的に導かれたものではなく、実用的な観点から導入されたパラメータである。確率の小さな領域で降雨減衰を飽和させる傾向をもたらすが、20GHz 帯では考慮されていない。

### 6.1.2 電気通信用 20GHz 帯デジタル方式

強雨期における 1 分降雨強度の 0.0075% 値を用いて年間の分布を推定するには以下の式が用いられる。

$$Z_p = \gamma \cdot R^n \cdot \Gamma_p \cdot D \cdot K_p \dots\dots\dots (41)$$

ここで、各パラメータの意味は 11/15GHz 帯と同様であり、確率分布を規定する  $p$  はガンマ分布の  $p\%$  値を 0.001875% 値で正規化した値となっており、瞬間的にみた雨量が一樣でないための補正係数  $K_p$  とはそれぞれの計算法は以下の通りである。

$$\Gamma_p = -0.489 - 0.5107s + 0.013s^2 \dots\dots\dots (42)$$

$$s = \log p \quad (0.00003\% \leq p \leq 0.03\%)$$

$$K_p = \exp(-fp\sqrt{D}) \dots\dots\dots (43)$$

$$f_p = 4.285 \cdot 10^{-2} - 5.689 \cdot 10^{-2}u - 1.258 \cdot 10^{-2}u^2 - 1.018 \cdot 10^{-3}u^3$$

$$u = \log(4p) \quad (0.0003\% \leq p \leq 0.03\%)$$

この式で  $p$  が式(42)に示したように確率 0.001875% 値で規格化しているのは強雨期と等価な強雨が発生する月数を年間 3 ヶ月として年間分布に変換しているからであり、そのため  $K_p$  の計算において確率  $u = 4p$  としてあるのは、 $K_p$  として強雨期分布の場合の値を使用するためである。また計算値の分布と実際の分布とが一致しないための補正係数  $C_p$  は本周波数帯では 1 を用いるので、式(41)では省略されている。

## 6.2 審査基準降雨減衰分布簡易計算法と理論計算法との比較

### 6.2.1 等価月数

審査基準に基づく各周波数帯の降雨減衰分布の計算に用いられるパラメータのうち、減衰係数パラメータは周波数が決まれば両計算法に対して固定値として同一値を用いてよく、

降雨設計値については日本国内の代表的地点に対して強雨期の 0.0075% 値として公表されている値が両計算法に対して用いられる。一方、強雨期と等価な降雨が発生する年間の月数（等価月数）は式(39)、式(42)に示す 11/15GHz 帯及び 20GHz 帯の審査基準での  $p$  パラメータの計算式から分かるように、前者は 0.0075% でそのまま規格化されているために 12 ヶ月、後者は 0.001875% (  $0.0075\% \times 3/12$  ) で規格化されているので 3 ヶ月と考えられる。長年の年間及び強雨期の降雨強度分布の実測結果からは等価月数は日本国内平均で 3 ~ 4 ヶ月と言われており、後者の 20GHz 帯は妥当な月数であるが、前者の 11/15GHz 帯については過大評価の恐れがある。

### 6.2.2 降雨強度分布パラメータ

ガンマ分布で近似された降雨強度分布を規定するのは、分布の形を決めるパラメータと降雨設計値である。後者については前節で考察したので、ここでは前者についての審査基準での差異について明らかにする。なお、降雨強度分布の  $n$  パラメータについては計算式に直接現れないが、降雨強度  $R$  の  $n$  乗分布の形状パラメータ  $x$  が先の形状関数  $p$  パラメータを一意的に決定するので、各周波数帯審査基準の  $p$  計算式から  $x$  を求め図 1 等より  $n$  を求めることができる。

詳細な検討結果は次節以降にも示すが、結果として 11/15GHz 帯審査基準では  $n = 0.013$ 、20GHz 帯審査基準では 0.0075 となっている。ここで  $n = 0.013$  とは日本における 10 分降雨強度分布の平均値である 0.015 の約 0.85 倍であり、この値は 10 分降雨強度と 1 分降雨強度とのおおよそその変換比に近いと言われている。一方 11/15GHz 帯よりも新しいシステムである 20GHz 帯においては  $n = 0.0075$  が使用されている。この根拠としては降雨強度の強い確率の小さな領域での近似度をあげるため全確率領域で求められた  $n = 0.013$  の約 60% としているものである。 $n$  の値は小さいと分布傾斜が大きくなり、減衰が大きく計算される方向となる。

### 6.2.3 一様降雨補正係数

一様降雨補正係数  $K_p$  は 5.1 項の理論検討に基づく式(34)の結果からも明らかなように、平均値 1 のガンマ分布の関数から計算でき、ガンマ分布近似された  $R^n$  分布の  $n$  パラメータ  $x$ 、降雨空間相関関数、当該確率及び距離により決定する。このうち図に示したシミュレーション結果から、 $x$  パラメータや確率よりも降雨空間相関関数の影響を最も大きくうけることを明らかにした。審査基準に基づく一様降雨補正係数の計算式を式(40)及び式(43)に示したがそれによる距離特性の結果を両審査基準共に図 8 に示す。

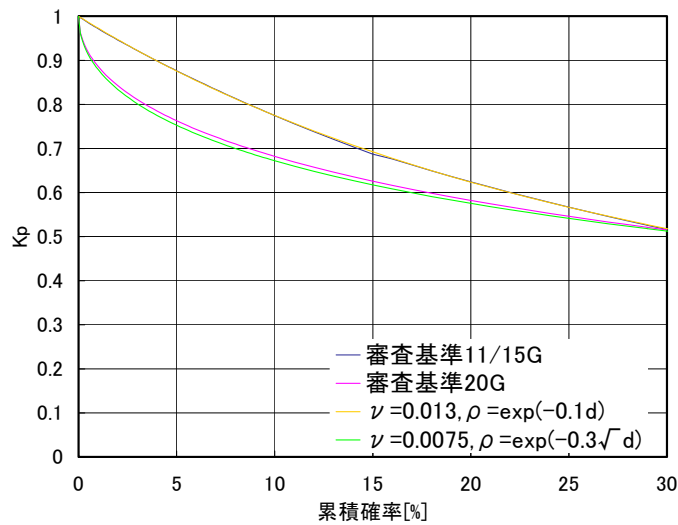


図8 両審査基準による  $K_p$  の差( $p=0.001\%$ )

この図より、一様降雨補正係数は 11/15GHz 帯の方が大きいことが分かる。この図には図 5 より、 $\nu = 0.01$  の時の降雨空間相関関数が  $\rho = \exp(-0.1d)$ 、および  $\nu = 0.0075$  で  $\rho = \exp(-0.3\sqrt{d})$  の時の結果を併記する。この結果から一様降雨補正では  $\nu$  パラメータが実測結果で得られた範囲では余り影響しないので、11/15GHz 帯は降雨空間相関関数が距離の 1 乗式、20GHz 帯は距離の 0.5 乗式を用いた時の近似式であることが分かる。両周波数帯において降雨空間相関関数が異なる原因としては、20GHz 帯の標準伝搬距離が 11/15GHz 帯に比べて短いので、短距離での降雨空間相関関数が実測データに近い距離の 0.5 乗式を用いるようになったためであると考えられる<sup>8)15)16)17)</sup>。

#### 6.2.4 ガンマ分布形状関数

ガンマ分布の形状を表すパラメータには  $\nu$  パラメータがあるが、ここで示す形状関数とはガンマ分布を特定確率値にて規格化した式であり、理論検討結果によれば式(36)に示すように当然ガンマ分布の形状パラメータ (ここでは  $R^d$  分布の  $\nu$  パラメータ)の関数となる。特定確率とは基準となる降雨強度の値が強雨期の 0.0075% 値しかないので、この式でも明らかかなように規格化すべき確率は等価月数によって変わってくる。

11/15GHz 帯と 20GHz 帯の審査基準の式による計算結果を図 9 に示す。この図からも明らかかなように規格化する確率値はそれぞれ 0.0075% 値及び 0.001875% 値であるのでそれぞれ規格化された確率で 1 となっている。即ちそれぞれの審査基準では等価月数が 12 ヶ月及び 3 ヶ月としていることが分かる。この図には式(36)に基づき、 $\nu = 0.013$ 、確率 0.0075% 値で規格化した結果と、 $\nu = 0.0075$ 、確率 0.0075% 値で規格化し等価月数 3 ヶ月を考慮して年間確率 0.001875% 値の規格に変換した結果とを併記する。この図よりそれぞれの計算結果は審査基準の式による計算結果とよく一致しているのが分かる。逆に審査基準の式はここに示した条件で計算した結果の近似式であることが分かる。但し 20G の近似式は多項式の次数も少ないためか確率の高い部分で近似度が劣っていることが分かる。

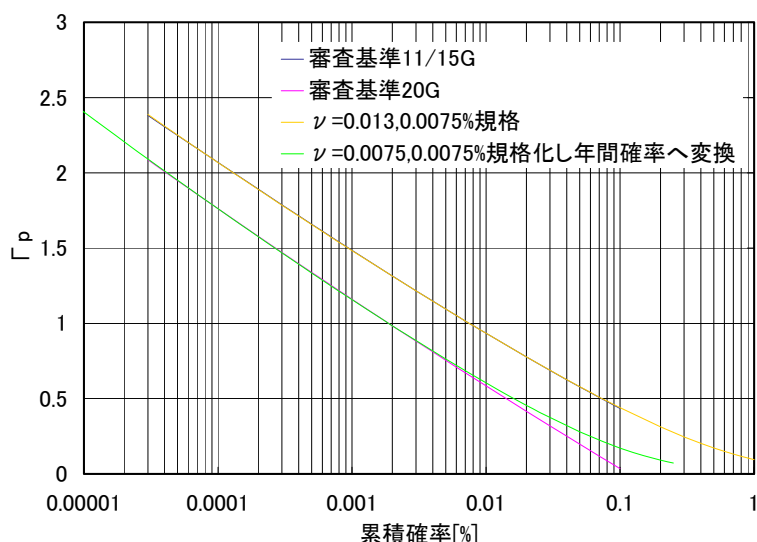


図9 両審査基準による  $p$  の差

### 6.2.5 審査基準計算法のまとめ

審査基準で提示されている降雨減衰分布の計算法は、ガンマ分布による降雨強度分布の近似から導出された結果を多項式近似したものであり、近似するにあたって基となった各パラメータの計算条件を取りまとめると表2に示す通りと推定される。

表2 審査基準で使用されたと考えられるパラメータ値

パラメータ	11 / 15GHz 帯	20GHz 帯
降雨設計値 $R_0$	強雨期 0.0075%値	強雨期 0.0075%値
一様降雨補正係数 $K_p$	$R = \exp(-0.1D)$	$R = \exp(-0.3 D)$
降雨強度分布形状パラメータ	$= 0.013$	$= 0.0075$
$R^n$ 分布形状パラメータ $x$	$x = 0.01$	$x = 0.0075$
ガンマ分布形状関数 $p$	$x = 0.01$	$x = 0.0075$
形状関数規格化確率	0.0075%	0.001875%
等価月数 $M$	12ヶ月	3ヶ月

### 7. むすび

降雨による電波の減衰量とその時間率分布を一般的に推定するため、現在日本における降雨減衰分布推定に関し最も一般的な降雨強度分布がガンマ分布する時の降雨減衰分布の計算手順を理論的に明らかにした。計算に当っては累積確率から減衰量を求める降雨減衰分布の計算に用いられる一様降雨補正等のパラメータが平均値が1のガンマ分布(ガンマ分布の2つのパラメータ = )の  $p\%$  値  $S_p(\ )$  を用いて表現できることを示すと共に、これをを用いて累積確率から減衰量を求める式とを定式化した。一方、減衰量から累積確率を計算することによって得られる降雨減衰分布に関しては、積分表現を近似する式を提示した。これら2つの式は式表現が異なるが降雨強度分布等の計算に使用するパラメータを



同じくすることにより比較的良好に一致することを確認した。次に現在準ミリ波帯の回線設計において降雨減衰分布の計算に用いられている審査基準の式について、理論計算結果と比較することによりその導出過程を明らかにすると共に計算に使用されたパラメータの値を推定した。これにより今後新たな周波数帯等において降雨が問題となる無線回線の品質評価をガンマ分布に基づき行う場合には有効であると考えられる。

降雨減衰分布をガンマ分布で近似する方法は、現在 M 分布等のより精度が高いと言われる方法が提示されているが、降雨減衰同時確率や降雨減衰差分布等の理論計算に必要な相関のある変量の同時確率密度分布がガンマ分布では導出されており、これらの分布を統計理論的に計算ができる点に長所がある。従って基本となる降雨減衰分布の計算も積分形式ではなくて直接計算できる式を明らかにした点で有効であると考えられる。

#### 参考文献

- (1) 森田，樋口「降雨による電波の減衰量の推定に関する統計的研究」通研実報 19，1 (1970)
- (2) 森田「降雨強度分布についての考察」通研実報 26，5 (1977)
- (3) 細矢「日本各地の 1 分雨量分布の一推定法」信学論 B - 71 B，2 (1988)
- (4) 多賀，石田，佐々木「無線改選設計に必要な 1 分降雨強度分布推定法の比較と条件付 M 分布の提案」信学技報 AP2002 - 57 (2002)
- (5) 総務省「電波法関係審査基準」電波通信振興会 (2007)
- (6) 小野，唐沢「日本全国を対象とする M 分布を用いた異積分時間降雨強度確率分布の高精度変換法」信学論 (B) 90 - B，3 (2007)
- (7) 森田，樋口「準ミリ波帯隣接区間の降雨減衰差の推定」通研実報 25，2 (1976)
- (8) 細矢，佐々木，白土，森田「20GHz 帯降雨時伝搬特性の推定」通研実報 33，6 (1984)
- (9) T.Oguchi " Attenuation of electromagnetic wave due to rain with distorted raindrops (part ) " J of RRL 11, 53 (1964)
- (10) 多賀，石田，喜瀬，佐々木「準ミリ波帯降雨減衰分布の分布形とその推定法の検討」信学技報 AP2003-113 (2002)
- (11) 吉川，佐々木，石田，高橋，明山，高梨，金澤，小川「ギガビットミリ波無線アクセスシステムの開発( ) (5)降雨減衰分布推定に必要な一様降雨補正係数の検討」2004 電情通学総大資料 B-5-296 (2004)
- (12) 佐々木，石田，高橋，吉川，浜口，小川「降雨領域回線設計における年間降雨強度分布の検討」2005 電情通学総大資料 B-1 - 4(2005)
- (13) 佐々木，石田，高橋，吉川，浜口，小川「平均値 1 のガンマ分布を用いた降雨減衰分布の統一化」2006 電情通学総大資料 B-1 - 8(2006)
- (14) 小野，唐沢「降雨減衰確率推定方法の精度向上を目的とした降雨強度の n 乗の空間相関特性に関する考察」信学論 (B) 89 - B，10 (2006)

- (15) 森田, 樋口「ミリメートル波帯降雨減衰の推定」通研実報 24, 9 (1975)
- (16) Ishida, Sasaki, Yoshikawa, Akeyama, Takahashi, Takanashi, Kanazawa and Ogawa “ Development of Gigabit millimeter-wave broadband wireless access system ( ) - (4) Estimation for probability distribution of rain attenuation at 32 GHz band - ” Proc. of 6<sup>th</sup> TSMMW (2004)
- (17) 佐藤「降雨強度の空間相関および雨滴層高度についての検討」信学論(B) 66 - B , 4 (1983)