

研 究

UDC 621.372.2:621.317.36

標準電波周波数特性の解析法に関する考察 (II)

柴田 久* 赤塚 耕輔**

CONSIDERATION OF ANALYSIS OF FREQUENCY VARIATION OF
THE FREQUENCY STANDARD DEVICE (II)

By

Hisashi SHIBATA and Kosuke AKATSUKA

In our previous paper were given the concepts and mathematical expressions of measured values in the standard frequency measurements of various kinds, and the methods of analysing those data were mentioned schematically. In this paper the mathematical discussions of those methods previously mentioned will be taken more precisely than before. Namely, on the basis of normal regression theory, discussing is devoted to estimating practically the frequency trend of standard device by the methods polynomial approximation, modified polynomial approximation, running mean and variate difference as well as to giving the statistics of accuracy unbiased variance, confidence limits, etc. Some more results will also be shown.

1. 序 論

周波数標準原器の発振周波数変化は、既に発表したように(文献(1))長期 trend を含む時系列として表現されるものであり、その trend は(1)多項式法、(2)組合せ多項式法、(3)階差法、(4)移動平均法、(5)移動平均周期法などの方法によって求めることができる。これらの方法については既に前論文において一応述べたのであるが、ここでは実際の測定値系列から原器特性を求める場合の手順およびその場合の推定値の信頼度について論ずることとする。

上述の諸法のうち、階差法は従来この目的のためかなりよく用いられてきた方法であるが、非常にスムーズな変化ならばともかく、今問題としているような統計的変動項を相当に含んだ時系列の解析には、階差によって変動量が倍加され解析の精度が低下するため、あまり適しているとはいえない。また移動平均法ないし移動平均周期法は統計的に変動項の影響を押え、正しい動きに近い

値を得るものとしてかなり有効ではあるが、その結果は長期にわたって見るとき必ずしも原器の物理的動作特性を与えるものとはいえない上に、その計算法も不便な点もあるので、特別の場合以外にはあまり使用されない。

したがって原器特性の解析は主として多項式法および組合せ多項式法を使ってなされるのが最も便利であり有効なものと思う。移動平均法ないし移動平均周期法はその補助手段として小修正に使用され、また階差法は多項式法の近似多項式の次数決定の手段として利用される。以下この観点に立って主として多項式法および組合せ多項式法による解析手段並びにその解析精度について述べた上、解析結果の実例を示すとともに、階差法による次数の決定法および小修正の手段としての移動平均法ないし移動平均周期法の取扱い方について考察することとしよう。

2. 多 項 式 法

原器の発振周波数変化が時間に関する多項式によって

* 主任研究官 ** 標準課

近似できる場合に用いられるが、trend が連続で微分可能な場合には、その連続変化は常にベキ級数表示が可能であり適当な次数の多項式により十分精密に近似できるはずであり、この方法は最も広く一般的に使用される有効な方法である。しかもこの計算は最近急速に普及した電子計算機によって実行することができ、多項式の次数を計算の労力もしくは手間の面から制限する必要もなく、可能な限りの精度が得られ最も有力かつ便利な方法であるといえる。

この場合原器の周波数 trend を推定する方法は、いわゆる正規帰論論によって与えられる。すなわち前論文において述べたとおりこの場合に得られる諸測定値は長期 trend の周りに正規分布をなすと見なして差支えない。今この trend を

$$f(t) \sim a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k \quad (1)$$

で表わし測定値はこの周りに分散 σ^2 の正規法則に従って分布しているとする。このような仮定に従うと見られる測定が n 個の時点において得られたものとする、そのような測定値の集合 $O_n(f_i | t_i; i=1, 2, \dots, n > k+1)$ は $N\left(\sum_{p=1}^{k+1} a_{p-1} t^{p-1}, \sigma^2\right)$ から取った大きさ n の標本でありその確率素分は

$$dF(f_1, f_2, \dots, f_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(f_i - \sum_{p=1}^{k+1} a_{p-1} t_i^{p-1}\right)^2} \cdot df_1 \cdot df_2 \cdot \dots \cdot df_n \quad (2)$$

となるので a_0, a_1, \dots, a_k の最尤推定量はこの式のベキの自乗和を最小ならしめることにより得られる。ここではその詳しい計算は省略して結果のみを記しておく。そのため今

$$\left. \begin{aligned} a_{pq} &= \sum_{i=1}^n t_i^{p+q-2}, \quad a_{0p} = \sum_{i=1}^n f_i t_i^{p-1}, \quad a_{00} \\ &= \sum_{i=1}^n f_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とおき、更に

$$a^{pq} = \frac{|a_{pq}| \text{ における } a_{pq} \text{ の余因子}}{|a_{pq}|}$$

とすれば

$$a_{p-1} = \sum_{q=1}^k a_{pq} a_{0q}, \quad p=1, 2, \dots, k+1 \quad (4)$$

となる。また分散 σ^2 の最尤値 $\hat{\sigma}^2$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f_i - \sum_{p=1}^k a_{p-1} t_i^{p-1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(a_{00} - \sum_{p=1}^k a_{p-1} a_{0p}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

これらの推定値に関して次のことが成り立つ。

(i) $a_{p-1} - a_{p-1}$ ($p=1, 2, \dots, k+1$) は平均値 0 の ($k+1$) 変数の正規法則に従って分布する。その分布の分散共分散行列は $\left\| \frac{a_{pq}}{\sigma^2} \right\|^{-1}$ である。

(ii) $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ は自由度 $n-k-1$ の χ^2 -法則に従い ($a_{p-1} - a_{p-1}$) とは独立に分布する。

これらの結果から多項式の系数 a_{p-1} の信頼限界は、

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{a_{p-1} - a_{p-1}}{\sqrt{a^{pp} \sigma^2}} \sqrt{\frac{n\sigma^2/\sigma^2}{n-k-1}} \\ &= \frac{(a_{p-1} - a_{p-1}) \sqrt{n-k-1}}{\sqrt{a^{pp} \cdot n\hat{\sigma}^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

が student の t 分布に従うことから得られる。すなわち真の値 a_{p-1} の危険率 α の信頼区間は t 分布によって定まる値 τ_α を使えば

$$\begin{aligned} a_{p-1} - \tau_\alpha \cdot \frac{\sqrt{a^{pp} \cdot n\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n-k-1}} \\ < a_{p-1} < a_{p-1} + \tau_\alpha \cdot \frac{\sqrt{a^{pp} \cdot n\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n-k-1}} \end{aligned} \quad (7)$$

で表わされる。電子計算機による計算では a_{p-1} ($p=1, 2, \dots, k+1$) の各値のほかに $n\hat{\sigma}^2$ も求められるように Programming がなされている。信頼区間を求めるのに必要なもう一つの量 a^{pp} の値は (3) 式に示されるように、逆行列の計算により得られるのであるが、逆行列の計算も既に Programming されたものがあり、 a^{pp} の値を計算することはさしたる困難なしに実行できるのである。

このようにして原器周波数の trend を表わす多項式は定められるわけであるが、実際の場合に必要なのはむしろこのような係数の値よりも周波数変化そのもの、すなわち多項式の各時点における値である。その値は勿論計算機により上の係数の推定と同時に計算されるのであるが、その値の精度ないしは信頼区間を一般に求めることは非常に困難である。しかもその信頼区間の幅は t の原点を遠ざかるに従って広がるのが予想され、推定された全区間にわたって均一な精度が得られない。

原器周波数 trend $f(t)$ の信頼限界を求めるには t の原点をいろいろに移し変えた上で多項式法を適用する。すなわち t の原点においては $f(0) \sim a_0$ であるので、 f の真の値の信頼限界は a_0 の信頼限界と全く同じであって

$$\begin{aligned} \left\{ a_0 - \tau_\alpha \frac{\sqrt{a^{11} \cdot n\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n-k-1}} \right\}_t < \left\{ f(0) \right\}_t \\ < \left\{ a_0 + \tau_\alpha \frac{\sqrt{a^{11} \cdot n\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n-k-1}} \right\}_t \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここに $\{ \}_t$ なる表示は t という時点を原点として計算を行なったことを意味する。このような計算の繰返しは一見非常に面倒なように思われるが、計算機

が使用できる場合にはそれほどの労力を要するものではない。

3. 近似多項式の次数の推定

多項式法は上述のように極めて便利かつ有効な方法であるが、その方法を実際に適用するためには種々問題となる点が残されている。その中でも特に重要なものとして近似多項式の次数決定の問題がある。すなわち上述(1)式における次数 k の値を如何に選ぶかは特性解析上特に重要で、ある意味では近似の良さを決定づけるものともなるのである。

本来原器発振器の周波数 trend の決定は、各発振器の発振特性を支配する物理的な諸条件を考慮することによってなされるべきものである。すなわち水晶周波数原器の周波数長期 trend は、水晶振動子の枯化現象 (aging) がその主原因となって起こされるものであるので、その現象の物理的原因を詳細に調査し究明した上で、物理的因果関係として周波数時間変化を把握することが最も望ましいのである。勿論材料の精選、形状に対する考慮、工作過程における細心の注意並びにその方法の研究などにより規則的および不規則的変化は極力取り除かれるよう努められるのではあるが、結晶の内部構造、表面の特性、金属部の張力の関係接続回路の状態などのため、なお幾分の aging および不規則変化が残されるのである。

このように水晶振動子の aging は種々の原因によって起こされるもので、それを完全に除去することはほとんど不可能とも思われるばかりでなく、それらの原因につきそれぞれ詳細に解明し、aging の特性を物理的に規定もしくは推測することは極めて困難であり、少なくとも現状においてはそれは事実上不可能であると考えられる。更に水晶温度を一定に保つための恒温槽、発振回路を構成する回路部品などにもいろいろ不明の変化が含まれており、水晶 aging 特性を一そうつかみにくくするとともに周波数変化特性をますます複雑化するのである。

したがって水晶振動子の aging 特性を含めた原器の周波数の trend は、実際にそれを動作させた上でその測定データを基として統計的手段に頼って推定する以外に方法はないのである。例えばその変化が多項式で表わされると仮定し、その近似多項式を求める場合でも、物理的考慮からはその次数すら決定することはほとんど不可能で、統計的手段にまつ以外にない。

近似多項式の次数を統計的に定める手段としては次の二つの方法が考えられる。

〔第1法〕 直接検定による方法

周波数 trend を(1)式で表わされる k 次式において、多項式法を適用した結果についてその最高次の係数に対して

$$a_k = 0$$

を検定する。すなわち 6) において $a_{p-1} = 0$, $p = k+1$ とおいて

$$\tau = \frac{a_k \sqrt{n-k-1}}{\sqrt{a^{k+1, k+1} \cdot n \hat{\sigma}^2}} \quad (9)$$

が student の t 分布に従うこともしくは

$$F^1_{n-k-1} = \frac{a_k^2 (n-k-1)}{a^{k+1, k+1} \cdot n \hat{\sigma}^2} \quad (10)$$

が F 分布に従うことにより検定する。すなわち自由度 $n-k-1$ の t 分布の表もしくは自由度 $(1, n-k-1)$ の F 分布の表から、予かじめ設定された危険率 α に対する値 τ_α もしくは $F(\alpha)$ をそれぞれ見出して、(9) もしくは (10) で計算される値と比較して、もし

$$\tau < \tau_\alpha \quad \text{もしくは} \quad F^1_{n-k-1} < F(\alpha)$$

ならば、 $a_k = 0$ であると認め、これ以上高次の近似多項式は用いない。換言すれば k 次式が十分よい近似を与えるものとして、既に計算されたものを周波数 trend を表わす式として採用する。またもし

$$\tau > \tau_\alpha \quad \text{もしくは} \quad F^1_{n-k-1} > F(\alpha)$$

であれば、 $a_k \neq 0$ であると判定し、より高次の次数が必要であるので、次数を1だけ上げて $(k+1)$ 次式につき多項式を適用し、計算並びに検定を繰り返すのである。

この場合、直交多項式を使用すると次数を上げた場合計算を始めからやり直す必要はなく、該当次数だけの計算で次に進めるし、検定に使う常数の計算も容易になるなどの利点があるが、計算機を使用できる場合には計算の労力、時間はあまり問題とはならない上、一般的多項式近似の計算は既存のプロミシングが使用できるのでさらに直交多項式を使う必要はないであろう。

〔第2法〕 階差による方法

多項式は階差を取ることによりその次数が1だけ下げられる。したがって k 次式はその逐次階差を取ってゆくと k よりも大きな ν に対してその ν 次階差は0となる。この性質を利用して常数值を決めてゆけば多項式が定められるわけで、事実このようにして多項式を求める方法が階差法と呼ばれる方法であるが、この場合のようにランダムな変動が大きい(相対的に)ときには階差を取ることにより変動量はますます増大してゆくばかりでなく、得られた系列の各値の間に独立性が失われてゆくの、多項式を求める手続きとしてはあまりよい方法とはいえず

ない。ただ近似多項式の次数を求める手段としてならば非常に有効である。

逐次階差によって近似多項式の次数を決めるためには、(1) で与えられる多項式に対して ν 次階差 $\Delta_\nu f(t)$ は $\nu > k$ に対しては

$$E\{\Delta^\nu f(t)\} = 0$$

でありかつまた

$$s_\nu^2 = \left[(k-\nu) \cdot {}_{2k}C_2 \right]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-\nu} \left\{ \Delta_\nu f(t_i) \right\}^2$$

が σ^2 の不偏推定量であることを利用する。すなわち Tintner は階差の独立性を確保するため

$$\left. \begin{aligned} \Delta^k f(t_l) &: l=r+i(2k+3) \\ \Delta^{k+1} f(t_m) &: m=r+k+1+i(2k+3) \\ i &= 0, 1, 2, \dots, j-1, 1 \leq r \leq 2k+3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となるようにサンプリングした上で、次数が k に等しいかまたはそれ以下であるという帰無仮説を

$$F_{j,j} = \frac{\sum_l (\Delta^k f(t_l))^2}{\sum_m (\Delta^{k+1} f(t_m))^2} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} \quad (12)$$

なる F 分布によって検定することを導いた。すなわち自由度 (j, j) に対する F 分布の表から、危険率 α に対応する F の値 $F(\alpha)$ を読み取っておき、上式から計算される値に対し

$F_{j,j} < F(\alpha)$ ならば k 次式を採用、

$F_{j,j} > F(\alpha)$ ならば $(k+1)$ 次式につき再検定

により次数を決めるのである。この方法では (11) に示されるようなかなり粗いサンプリングが行なわれるので、データのかなり大きな部分が捨てられる。このようなデータの損失を防ぐため Johnson は

$$\left\{ \Delta^k f(t_m), \Delta^{k+1} f(t_m) \right\}; m=r+i(k+2) \quad (13)$$

$$i=0, 1, \dots, j-1, 1 \leq r \leq k+2$$

なる階差の組を選び、これらの組に対して

$$T_{p,q} = \sum_m \Delta^p f(t_m) \cdot \Delta^q f(t_m); p, q = k \text{ or } k+1 \quad (14)$$

を計算しておけば

$$L = \frac{T_{k,k} \cdot T_{k+1,k+1} \cdot T_{k,k+1}^2}{(2k+1) \left\{ T_{k,k} + \frac{k+1}{2(2k+1)} T_{k+1,k+1} + T_{k,k+1} \right\}^2} \quad (15)$$

は必要な次数より大なる k の値に対して

$$P(L) = \frac{1}{2} (j-1) \cdot L^{\frac{1}{2}(j-3)} \quad 0 \leq L \leq 1 \quad (16)$$

に従って分布する。次数が k またはそれ以下であることを検定するためにはこの性質を利用する、この場合危険率 5% に対応する $\log_{10} L$ の値は $-2.6/(j-1)$ 、また危険率 1% に対応する値は $-4.0/(j-1)$ である。

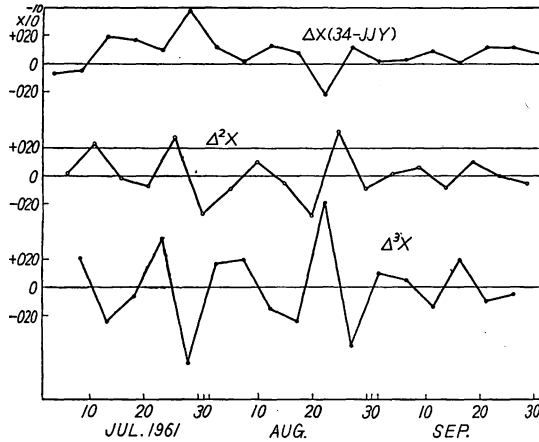
4. 計算の実例

多項式法による標準周波数原器の特性解析計算の実例を示す。すなわち現在電波研究所で保有する $N^{14}H_3$ -Maser を Primary Standard として、同じく電波研究所で目下運転中の水晶周波数標準原器の動作の状況を精密に計算して見ることとする。

ここでは実例を示すため適当なものとして 34 および 11 と呼ばれる二つの原器を選んでその特性を計算した。これら原器の呼称はその存在する場所および接続される発振器のパネルによって名づけられたものであるが、現在 34 および 11 に使用されている水晶振動子は、それぞれ GT-cut の 815 型および 810 型のものであり、発振回路には両者とも電橋安定型のものが用いられているのである。第 2.1 図にこれらの原器の発振周波数を $N^{14}H_3$ -Maser で測定した結果を、また第 2.2 図にはこれらと JJY 電波との比較測定の結果を図示した。今これらの測定値に基づいて両原器の特性を解析する手順を示すこととする。

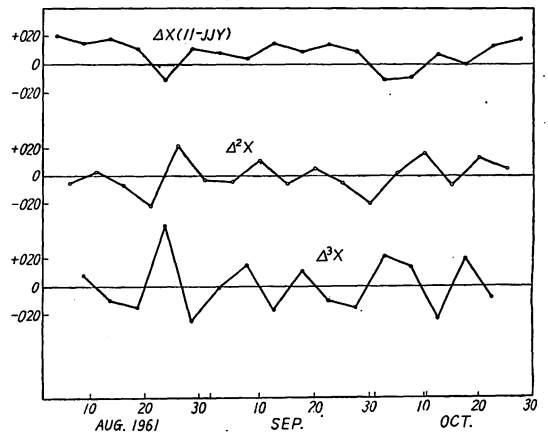
特性は多項式法によって計算されるのであるが、そのためにはまずその近似多項式の次数を決定しなければならない。次数決定は前述のように階差法によるのが有効であるが、その階差の変化の様子を第 1 図(次頁)に示した。Maser による測定は機械の都合上等間隔に行なわれていないので、これらの階差は 34-JJY および 11-JJY の比較測定値に対して取ったものであるが、図はそれを見やすくするためと、各値の独立性を保つため、ある間隔をおいて取ったものである。図からみて 34 および 11 両原器とも 1 次階差にはかなりの時間的変化傾向を含んでいることがわかる。2 次ないし 3 次の階差は両者ともほとんどランダムと考えてよいようにみえるが、いくぶん 3 次の方がランダム程度が判然しているように思われる。因みにデータ数の多い 11-JJY の測定につき前記 Tintner の方法を適用して検定してみる。すなわち $F_{j,j}$ の値を計算した結果を次表(次頁)に示す。したがって危険率 5% では 3 次式で近似すればよいことがわかるのである。これは第 1 図から見当をつけたものと大体一致しているため、ここでは 3 次式を仮定して以下の多項式近似を行なったのである。

3 次式による多項式近似の結果を第 2.1 図に示す。図中実線で記入した曲線がその計算結果を表わすものでま



第1.1図

	資料数(j)	F_j^j	5%値
1 次式検定	35	4.027*	1.767
2 "	26	2.217*	1.937
3 "	19	2.394*	2.156
4 "	16	1.669	2.352



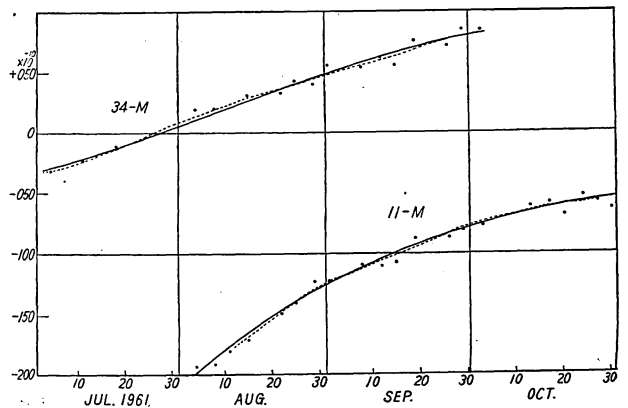
第1.2図

て分布すると考えてよい。統計的変動項は周波数変化値系列から長期 trend を差引いた残差であって、それは平均値0の正規法則に従うとみてよいであろう。その分散の値は前述のようにして多項式近似の残差から最尤推定量として推定できる。すなわちこの統計的変動項は1

たは0で示された測定結果とかなりよく合っていることがわかる。この推定における残差平方和から求めた両原器の分散の最尤値は、34が 4.134×10^{-10} 、11が 2.500×10^{-10} であった。すなわち実測値はこれらの推定値の周りに $5 \sim 7 \times 10^{-10}$ 程度の標準偏差をもって分布していることがわかる。

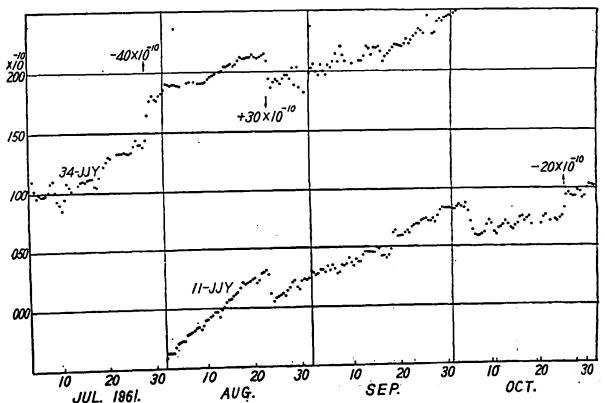
第3図(次頁)は上のようにして求められた34および11の特性を基として、34-JJY並びに11-JJYの測定値から計算された上記期間中のJJYの偏差を図示したものである。図中・で示された値は34を仲介として、また○で示された値は11を仲介として求められた計算値である。図にはこれとは別にJJY電波をMaserで直接測定した値を○印をもって挿入しておいた。図からみてそれらの値は大局的にはかなりよく一致していると考えられる。細部に至るまで完全な一致のみられないのは、 $5 \sim 7 \times 10^{-10}$ なる大きさの標準偏差をもって分布する34、11の両原器並びにJJY発振器の統計的変動項に原因するものであって、現状ではこの食い違いの生ずるのは如何にしても防ぎにくいのである。

周波数変化の長期 trend はこのようにして求められたのであるが、原器特性を完全に把握するためにはこのほかに統計的変動項の性質を知ることが必要である。この場合の周波数変化量は前論文にも述べたとおり、長期 trend の周りに正規法則に従っ

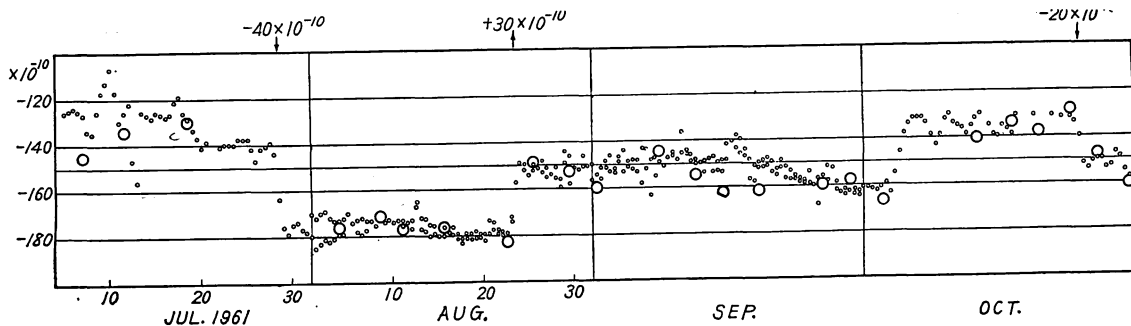


第2.1図 Maserによる34および11の測定値

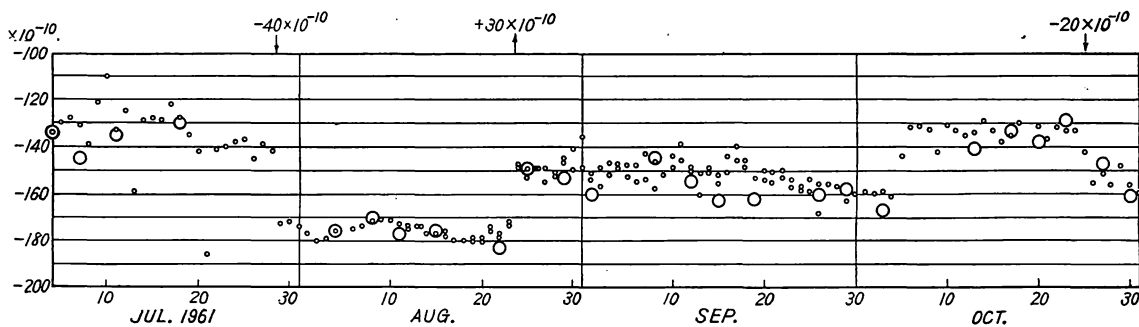
●、○ 測定値、— 多項式法による特性曲線、..... 移動平均法による修正曲線



第2.2図 34-JJY、11-JJY 時計比較測定値



第3.1図 多項式法による JJY の偏差
 ・ 34 による推定値, ・ 11 による測定値, ○ Maser による JJY 推定値



第3.2図 多項式法のあとで移動平均法を適用した場合の JJY の偏差
 ・ 34 による推定値, ・ 11 による推定値 ○ Maser による JJY 推定値

種の正規確率過程として表現できるはずである。このような確率過程の詳しい表現についてはなお検討中であるが、前述第3図の偏差に対して自己相関関数を計算した結果を第4図に示す。34を仲介としたものも、11を仲介とした値もその correlogram はほとんど同じ値を示したので、図は両曲線を平均して描いておいた。図に示すとおりその形は減衰型のものであるが、この相関関数の値は34あるいは11の変動項によるものと、JJYの変動項によるものとが合成されたものであるので、これをもって原器もしくは JJY 発振器の自己相関を示すものとはいえないのである。更にまたこの中にはかなり大きな測定誤差による値も含まれているのでこの correlogram についての詳しい検討は今後に残すこととする。

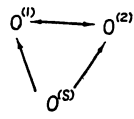
5. 組合わせ多項式法

普通の場合には以上述べた多項式による推定によって原器の特性は求められるのであるが、標準電波はその性格の上からいって、たとえ僅かでもその精度を向上することが望まれるので、この意味において測定システムを検討した上で推定をできるだけ適確に行なう必要がある。そのためにはここに述べる組合わせ多項式法を使用するのも一つの方法である。

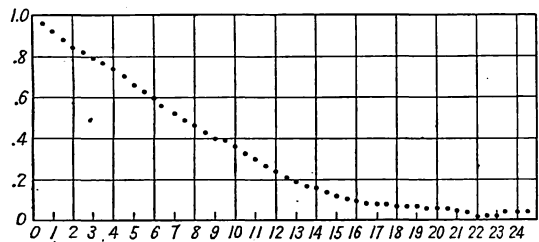
組合わせ多項式法についてはやはり前論文においてその原理的な説明がなされたのであるが、実際に適用する場合としては次の2種類の場合が考えられる

A. 特性のわかった一つの前器から他の数個の前器特性を推定する場合

下図のような組合せの測定のあるとき、特性既知の前器 $O^{(s)}$ に対して $O^{(1)}$ および $O^{(2)}$ の特性を計算する場合について考える。この場合計算式の繁雑になるのを防ぐためと、また $O^{(s)}$ として Maser など



Primary Standard を想定して $O^{(s)}$ の特性は constant



第4図 JJY 偏差のコレログラム

で0であるとしておく。O^(s)が何かの trend を持つ場合には計算終了後その trend の分だけ加えてやればよいので、このような仮定によって一般性を失するような心配は全くないのである。

この場合各原器特性を表わすべき近似多項式の次数は、既に何等かの方法で定められているものとし各々

$$O^{(1)}: f^{(1)}(t) \sim a_0^{(1)} + a_1^{(1)}t + a_2^{(1)}t^2 + \dots + a_k^{(1)}t^k \quad (17)$$

$$O^{(2)}: f^{(2)}(t) \sim a_0^{(2)} + a_1^{(2)}t + a_2^{(2)}t^2 + \dots + a_k^{(2)}t^k \quad (18)$$

によってそれらの特性の長期 trend が表われているものとすれば、§2において述べた多項式法における(2)式に相当する尤度函数の取扱いからこれら多項式の係数の最尤解は

$$S \equiv w^{(1)} \sum_i \left\{ f_i^{(1)} - \sum_p a_p^{(1)} t_i^{p-1} \right\}^2 + w^{(2)} \sum_i \left\{ f_i^{(2)} - \sum_p a_p^{(2)} t_i^{p-1} \right\}^2 + w^{(12)} \sum_i \left\{ f_i^{(12)} - \sum_p (a_p^{(1)} - a_p^{(2)}) t_i^{p-1} \right\}^2 \quad (19)$$

を最小とする $a_{p-1}^{(1)}$ および $a_{p-1}^{(2)}$ の値 ($p=1, 2, \dots, k+1$) として求めることができる。ただしここに $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ および $w^{(12)}$ はそれぞれの測定に対して付せられる重みを表わすものであって、尤度函数の考えからしてその大きさは各測定値の分布の分散の大きさに逆比例して取られるべきである。その分散の値は勿論真の母分散でなく標本から求められた最尤解を使用しても実用上問題となることはないのであるが、その最尤解も本来は問題を解いて trend を求めた上で得られるはずのものであるので、この意味においてこの方法すなわち組合せ多項式法には多少の循環論が含まれているのである。しかし実際問題としては測定値系列の分散の値は系列の形から、あるいは他の方法例えば多項式法などによる計算から大体の order の想像はつけられるので、その値により一応の重みを定めた上で組合せ多項式法を適用し、以後循環の度にその精度を上げ、逐次精密さを増してゆけばよいわけである。とはいうものの実用の立場からすれば重み w については、それほど細かな注意を要することは余らないと思う。

問題を本筋に戻してこの方法を定式化しておこう。すなわち(19)式を最小とするためこの式を各係数で微分して0とおくと

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_{q-1}^{(1)}} &\equiv w^{(1)} \sum_i t_i^{q-1} \left\{ f_i^{(1)} - \sum_p a_p^{(1)} t_i^{p-1} \right\} \\ &+ w^{(12)} \sum_i t_i^{q-1} \left\{ f_i^{(12)} - \sum_p (a_p^{(1)} - a_p^{(2)}) t_i^{p-1} \right\} \\ &= 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_{q-1}^{(2)}} &\equiv w^{(2)} \sum_i t_i^{q-1} \left\{ f_i^{(2)} - \sum_p a_p^{(2)} t_i^{p-1} \right\} \\ &- w^{(12)} \sum_i t_i^{q-1} \left\{ f_i^{(12)} - \sum_p (a_p^{(1)} - a_p^{(2)}) t_i^{p-1} \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし $q=1, 2, \dots, k+1$

を得る。係数の最尤解はこれらを連立させた $2(k+1)$ 元の連立1次方程式を解けば得られる。しかしながら実際にはこの方程式はこのままの形で解くよりは次のように整頓しておいた方がいろいろの点から便利であり、かつまたこの方法に対する見通しもつけやすいのである。

すなわち(20)式は§2における(3)式の記法をそのまま使うこととして整頓すれば簡単な計算の後次のような形にまとめられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{p=1}^{k+1} a_{pq} \cdot U_{p-1} &= w^{(1)} a_{0q}^{(1)} + w^{(12)} a_{0q}^{(12)} \\ &\quad (q=1, 2, \dots, k+1) \end{aligned} \right. \quad (21)$$

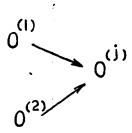
$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{p=1}^{k+1} a_{pq} \cdot V_{p-1} &= w^{(12)} a_{0q}^{(12)} - w^{(2)} a_{0q}^{(2)} \\ &\quad (q=1, 2, \dots, k+1) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

ただしここに U_{p-1} および V_{p-1} はそれぞれ

$$\left\{ \begin{aligned} (w^{(1)} + w^{(12)}) a_{p-1}^{(1)} - w^{(12)} \cdot a_{p-1}^{(2)} &= U_{p-1} \\ &\quad (q=1, 2, \dots, k+1) \\ w^{(12)} \cdot a_{p-1}^{(1)} - (w^{(12)} + w^{(2)}) a_{p-1}^{(2)} &= V_{p-1} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

のようにおいた。 $a_{p-1}^{(1)}$ および $a_{p-1}^{(2)}$ を求めるにはまず(21)および(22)からそれぞれ U_{p-1} および V_{p-1} を求め、その値をそれぞれ(23)および(24)に代入して2元連立方程式として $a_{p-1}^{(1)}$ および $a_{p-1}^{(2)}$ を求めるのである。(21)および(22)の両式は右辺にそれぞれ種類の測定によって得られた測定値を組合せ、計算される量が入るほかはそれぞれ U_{p-1} および V_{p-1} についての方程式の左辺のマトリックスは§2で述べた多項式法の方程式のものと全く同じであるので、その計算は多項式法のプログラムそのままを用いて計算機によって実行できるのである。また(23), (24)の連立方程式は極めて簡単なもので解くのにそれほどの手間はかかるものではないし、勿論計算機を使えば簡単に計算できるものである。

B. 特性のわかった二つの原器から他の一つの原器の特性を推定する場合



$O^{(1)}$ および $O^{(2)}$ の特性は既に知られており、その特性を表わす多項式は (17) および (18) 式で与えられ、 $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}, \dots, a_k^{(1)}$ および $a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_k^{(2)}$

は知られているものとする。これらの特性の与えられた $O^{(1)}$ および $O^{(2)}$ に対して $O^{(j)}$ なる発振器が比較測定されているとき、 $O^{(j)}$ の特性を求める方法について述べる。 $O^{(j)}$ の周波数特性長期 trend は

$$O^{(j)} : f^{(j)}(t) \sim a_0^{(j)} + a_1^{(j)}t + \dots + a_k^{(j)}t^k \quad (25)$$

なる多項式によって表わされるものとしてこの多項式の係数の最尤解を求める方法について考えるのである。ここにこの多項式を k 次式に取ったのは、便宜的に (17) および (18) 式とその次数を合わせただけのものであって、三者の近似多項式の次数が同じでないときは k として三者の最高次数を取り、それより低次の特性の原器に対しては高次の係数を始めから 0 としておけばよいのである。

この場合においても前述 A の場合と同様に、2 種類の測定にそれぞれ重みをつけそれを $w^{(1j)}$ および $w^{(2j)}$ とおいて

$$S \equiv w^{(1j)} \sum_i \left\{ f_i^{(1j)} - \sum_p (a_{p-1}^{(j)} - a_{p-1}^{(1)}) t_i^{p-1} \right\}^2 + w^{(2j)} \sum_i \left\{ f_i^{(2j)} - \sum_p (a_{p-1}^{(j)} - a_{p-1}^{(2)}) t_i^{p-1} \right\}^2 \quad (26)$$

なる量を考えれば係数 $a_{p-1}^{(j)}$ ($p=1, 2, \dots, k+1$) の最尤解 $a_{p-1}^{(j)}$ はこの S の値を最小ならしめる $a_{p-1}^{(j)}$ の値として計算されればよいのである。そのためには (26) 式を各係数により微分して 0 とおいて得られる $(k+1)$ 元の連立方程式を解かねばならないのであるが、それは簡単な変形により整頓すると次のような形となる。

$$\sum_{p=1}^{k+1} a_{Tq} \cdot \left\{ a_{p-1}^{(j)} - \left(\frac{w^{(1j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{p-1}^{(1)} + \frac{w^{(2j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{p-1}^{(2)} \right) \right\} = \frac{w^{(1j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{0q}^{(1)} + \frac{w^{(2j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{0q}^{(2)} \quad (27)$$

今この左辺の括弧内の値を $\alpha_{p-1}^{(j)}$ とおくとこの式は

$$\sum_{p=1}^{k+1} a_{Tq} \cdot \alpha_{p-1}^{(j)} = - \frac{w^{(1j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{0q}^{(1)} + \frac{w^{(2j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{0q}^{(2)} \quad (27')$$

となる。この式の左辺のマトリックスは前述 (21) および (22) 両式すなわち多項式法におけるものと全く同じ

ものであるので、やはり多項式法と全く同じプログラムを使用して計算機演算が行なわれるのである。そして求められる $\alpha_{p-1}^{(j)}$ の値は

$$\alpha_{p-1}^{(j)} = a_{p-1}^{(j)} - \left(\frac{w^{(1j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{p-1}^{(1)} + \frac{w^{(2j)}}{w^{(1j)} + w^{(2j)}} a_{p-1}^{(2)} \right) \quad (28)$$

によって示されているとおり、 $\alpha_{p-1}^{(j)}$ の値を $O^{(1)}$ および $O^{(2)}$ の特性の重み平均を基準として測ったものにほかならないのである。

重み $w^{(1j)}$ および $w^{(2j)}$ は A の場合と同様に両測定 of 統計的変動における分散の逆数に比例して取られるべきであるが、(27) および (28) 式から解るようにあらかじめ $w^{(1j)} + w^{(2j)} = 1$ となるように定めておけば計算には非常に便利な形となるのである。

6. 移動平均法および移動平均周期法

多項式法および組合わせ多項式法はかなり長期にわたって引き続き測定が行なわれており、その期間中の資料が統計的な意味で揃っている場合、すなわちかなり長期にわたって各時点の測定が均一の精度で行なわれており、かつ発振器にも特異な動きがなく、各時点における確率分布が一様であるとみられる場合に使用される。しかしながら実際の場合には一般にこのような均一な測定値は厳密には望み得ないので、多項式法もしくは組合わせ多項式法によって求められた原器特性は、移動平均法あるいは移動平均周期法によって細かな局部的変化について修正を施さねばならないことが多い。

移動平均法は測定値系列を適当な長さの範囲に区切り、その範囲を 1 時点ずつ順次移動しながら平均する方法で、その区間内では変化は直線的であることが必要である。すなわち特性は

$$f(t) \sim b + mt \quad (29)$$

なる形に表わされる場合に限り使われる。その区間内に今 n 個の測定点が存在するとすればこの意味での平均は

$$\begin{aligned} \bar{f}(t_j) &= \frac{1}{n} \left\{ f(t_{t+1}) + f(t_{t+2}) + \dots + f(t_{t+n}) \right\} \\ &\sim b + m \left(\frac{t_{t+1} + t_{t+2} + \dots + t_{t+n}}{n} \right) \\ &\sim f \left(\frac{t_{t+1} + t_{t+2} + \dots + t_{t+n}}{n} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

となる。すなわちこの平均値は $t_j = (t_{t+1} + t_{t+2} + \dots + t_{t+n})/n$ なる時点に対応する f の値を表わすものである。換言すれば移動平均値はこのような条件の下においては測定化変化特性の trend を与えるものと考えてよ

い。

移動平均の計算値の推定精度について考察するために (29) 式を書き換えて

$$f(t) \sim (b + mt_j) + m(t - t_j) = b_j + mt' \quad (31)$$

とおけば、移動平均値はこの 1 次式による近似における定数 b_j の推定値に他ならない。すなわち原理的には上述の多項式法と変わるといはないのである。しかもこの場合には $\sum t' = 0$ となるので b_j と m との推定値は互いに独立であるので、統計的取扱いは極めて容易となるのである。今、元の測定値系列の分散が σ^2 であるとすれば、移動平均値 \bar{f} は正規分布法則に従いその分散は

$$\sigma_{\bar{f}}^2 = \sigma^2/n \quad (32)$$

となるのである。

標準電波に関する測定値は、時計比較や差周波数積分装置などにみられるように、直接周波数値もしくは差周波数を測定したものでなく、それらを積算してゆきその積算 $F(t)$ を読んで $f(t_i) \sim \{F(t_{i+1}) - F(t_i)\}$ なる計算から周波数値を求める場合が多い。このような場合に (30) で表わされる和を作ると式の上から容易にわかるとおり、その値はこの区間の最初と最後の 2 時点における測定値の差となり、その中間の測定値は無関係となってしまう。したがってこのような測定値系列を使う場合には移動平均法は用いられない。

移動平均周期法はこのような場合に使用される平滑法である。その方法はやはり移動平均の場合と同様に測定値系列が直線的である長さを選んでその長さの区間を順次移動させながら

$$\sum_p \left\{ F(t_i + p \cdot \Delta t) - F(t_i) - \bar{f}(t_j) \cdot p \cdot \Delta t \right\}^2 \quad (32)$$

を最小とするように $\bar{f}(t_j)$ を定めるのである。その解は

$$\bar{f}(t_j) = \sum_p \left\{ F(t_i + p \cdot \Delta t) - F(t_i) \right\} / \sum_p p^2 \cdot \Delta t \quad (34)$$

で与えられる。ここに t_j はこの区間の中央の時点に取るのが普通である。この場合の平均周波数値 \bar{f} は

$$F(t) \sim a + bt \quad (35)$$

であるとすれば容易にわかるように、実は b の推定値を表わしている。したがってその推定精度も前と同様多項式近似の場合の式が使えるわけであるが、特に t_i をこの区間の中央の時点にとれば a と b とは独立となり、 \bar{f} は正規分布に従いその分散は

$$\sigma_{\bar{f}}^2 = \sigma^2 / \sum_p p^2 \cdot \Delta t^2$$

となるのである。

移動平均の場合の (29) の条件の下においてもこの方法は使用できるのであるが、その場合には (35) の代わ

りに

$$F(t) \sim a + bt + \frac{1}{2} mt^2 \quad (37)$$

としなければならないので

$$f(t_j) = \sum_p \left\{ F(t_i + p \cdot \Delta t) - F(t_i) \right\} / \sum_p p^2 \cdot \Delta t \\ \sim b + m \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \frac{\sum_p p^3}{\sum_p p^2} \right) \sim f \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \frac{\sum_p p^3}{\sum_p p^2} \right) \quad (39)$$

となり、 t_j はこの区間の中央点ではなく

$$t_j = t_i + \frac{\Delta t}{2} \frac{\sum_p p^3}{\sum_p p^2} \quad (39)$$

に取らなければならない。この場合の推定精度については (36) 式は用いられないのであるが、2 次多項式近似の場合の式を適用することによりそれほど困難はなく分散その他の統計量が求められるのである。

測定値系列に多項式法を適用したあとの残差はかなりの長期にわたって (29) 式の条件を満たすと考えてよい。したがってこの残差の系列に移動平均法を施し、多項式法の結果を修正することによりかなり細かい特性までつかむことができるはずである。11-Maser および 34-Maser の測定に対して、前記のように多項式法で求めた 11 および 34 の特性をこの方法で修正したのが第 2, 1 図の破線である。そしてこの修正された特性を基として求めた JJY の偏差を第 3.2 図に示す。

移動平均周期法および移動平均法はそれぞれ (29) ないし (35) の条件が満たされるような長さの区間を選んで行なわれなければならないのであるが、その区間が短かいと平滑はあまり有効でない。すなわち上記の条件を失しない範囲内で平均区間はできるだけ長く取るべきであるが、一般にはその長さに対して決め手となるような条件は見当たらない場合が多く、経験その他により適当な長さを選んで行なわれるのが普通である。

7. 結 論

以上、標準周波数原器の周波数時間変化特性を解析するために用いられる種々の手段について述べ、それらを用いて実際に計算した結果を示したのであるが、それら計算例に示されたように、多項式法およびそれを更に移動平均法で修正する方法はかなりよい結果を与えているように思われる。多項式法よりも組合わせ多項式法を適用の方が望ましいのであるが、そのためには測定網の編成が必要である上、網を構成する原器特性および測定

精度にあまり大きな食い違いがあつてはまずいので、この方法を実際に適用してゆくためには、なお技術的な面で解決すべき問題が残されているのである。

原器特性解析の手段としては以上挙げた種々の方法が使われるわけであるが、実際問題として標準電波周波数が真の値に対してどれだけの偏差を持つものであるかを決定するためには、なおいくつかの問題点が残っているのである。特性解析手順に関する問題点については既に本文の各項において述べたので、ここではそれ以外のより根本に属する事項について二、三のついた点を述べておくこととする。

その第1は周波数の真値の決定である。上述の解析においてはこの点に関しては周波数の真値を与える一つの原器 (Primary Standard) が存在して他のすべての周波数値はそれを基準として測った値を用いることとしている。前論文において述べたように、元来周波数は時間もしくは時量に関連して定義されるべきものであって、時間そのものに絶対時間が決定できない現状において、絶対真周波数値は到底決め得るものではないのである。今一步を譲って時間の基準は確保したとし、もしくは少なくとも時間との関連は度外視して周波数だけを取り出して独自の基準を設定することとしたとして、例えばわれわれが現在において最も信頼できる基準として採用している Maser や Atmicron などの原子標準においても、それらがもしここに数台存在すれば高い精度においては必ずそれらの示す周波数の間には食い違いを生ずるであろう。このような相互の食い違いを調整して如何にして最も正しい (というより最も確からしい) 基準を定めるべきであろうか? 勿論このような点に関しては原子標準が作り出される以前、水晶原器だけに頼っていた時代にも全く同様の問題が存在したわけであるが、それよりも格段の精度が得られ、また要求せられている今日においては、これについて特に細心の考慮が必要なのである。数台の原器をある Order において合っていることを確かめるだけの目的に使つたとすれば、得られる精度は1台のものの Order に止まってしまうであろう。せっかく数台を使用するからにはそれ以上の精度を得る目的に使用しなければなるまい。

次に第2の問題は異なった種類の測定に対する測定値の取扱いについてである。上述の解析においては一応測定値は同じ種類とはいわないまでも、統計的に同じ性格のものであるとして取扱つた。しかしながら前論文において述べたように、標準周波数に関する測定は種々の形で行なわれており、それから得られる周波数値は必ずしも一致しない。これは勿論各々の測定に含まれる測定誤差にも基因するものも確かに存在するのであるが、もっ

と根本的に測定値の表現する対象そのものの違いにも原因する。すなわち周波数に対しては前論文において違った2種類の定義を与えたのであるが結局ここに問題とした点についてすっきりした解決を望むとすれば、このような周波数の定義にもう一度立ち戻つて考えることが必要である。

その他多項式法に対する計算期間の問題、異常な動きに対する取扱いなど種々問題点は残っているがそれらに対する客観点決定の手段などについては今後なお研究する必要がある。

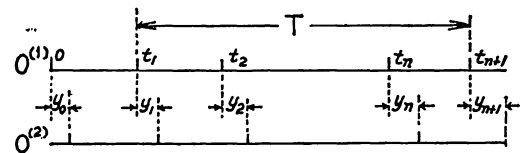
参考文献

- (1) 柴田久; “標準原器特性の解析法に関する考察 (I)”, 電波研季報, 8, No. 33, p. 472, 昭和36年11月。
- (2) ウィルクス (小河原正己訳); 数理統計学。
- (3) 小河原正己; “時系列に関する推測論について”, 確率論及び統計学の進出 (北川敏夫編), 1953, 5。

補遺—平均周波数の測定に関する一考察

時計面比較: 差周波数積分装置などによる周波数測定においては、従来測定期間の始めと終りとの2時点における測定値のみを使って平均周波数を計算していた。ここではその期間内における測定時点を増すことにより平均周波数測定の精度を増すことを考える。

今、測定は下図のようになされているものとし、その



各々のこの区間における平均周波数をそれぞれ $\bar{f}^{(1)}$ および $\bar{f}^{(2)}$, またこの場合時計を control する周波数を $\bar{f}^{(0)}$ であるとすれば、時点 t における時計面の差 y は次式で表わされる。

$$y \sim y_0 + f^{(0)} \left\{ \frac{1}{\bar{f}^{(2)}} - \frac{1}{\bar{f}^{(1)}} \right\} t \doteq y_0 + \frac{\bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)}}{f^{(0)}} t \quad (1)$$

実際の測定値は発振器自身のランダム特性および測定誤差のため (1) の値の周りに分散 σ^2 の正規法則に従つて分布しているものとする。

二つの発振器 $O^{(1)}$ および $O^{(2)}$ の平在発振周波数の差の割合 $(\bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)})/f^{(0)}$ の値は T だけ隔たった2時点における測定値から

$$\frac{\bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)}}{f^{(0)}} \sim \frac{1}{T} \{y(t+T) - y(t)\} \quad (2)$$

なる計算によって求められるのであるが、この値の推定の精度を与える分散の値は $2\sigma^2/T^2$ となる。したがって推定区間が長いほどその精度はよくなるはずである。とはいってもその区間を余り長く取ると、期間内における Aging が無視されてしまうおそれが生じてくるのである。またこのようにして推定された結果からは、母数 σ^2 に関する情報は何とも得られないのである。

T なる期間中に n の測定を行なってその測定値により、この期間の平均周波数を計算する手段としては次の二つの方法が考えられる。

(i) 直線推定法

前に述べたように時点 t_i における測定値 y_i は (1) 式によって表わされる直線の周りに正規法則に従って分布するので、測定値系列 $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_{n+1}, y_{n+1})$ を基として正規回帰論により回師直線

$$\hat{y}_0 + at \quad (3)$$

を求めれば最尤解として

$$a \sim \frac{\bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)}}{f^{(0)}} \quad (4)$$

が得られる。この場合時間の原点を上記測定時点の中央すなわち $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 0$ となるように取っておけば、 y_0 と a 並びに残差平方和 $S = \sum_{i=1}^{n+1} (y_i - \hat{y}_0 - at_i)^2$ とは独立となり a の分散 σ_a^2 は

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n+1} t_i^2 \quad (5)$$

となり、また真の値 a の信頼限界は

$$t = \frac{(a-a)\sqrt{\sum t_i^2} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{\sum (y_i - y_0 - t_i)^2}} \quad (6)$$

が Student の t 分布に従うことから得られる。この方法によれば単に周波数の偏差の割合の推定精度が上げられるのみでなく、元の分布の分散 σ^2 の値が S/n により最尤値として求められる上、(6) 式のように信頼限界も与えられ極めて正確な表現が可能となるのである。

(ii) 最小自乗法

原理的にはほとんど (i) と同じであるが、手取り早く推定するためにはこの方法を使う。これは (1) 式を基として考えられる残差平方和

$$S = \sum_{i=2}^{n+1} \{(y_i - y_1) - a(t_i - t_1)\}^2 \quad (7)$$

を最小とする a の値を求めればよい。その結果は

$$\tilde{a} = \sum_{i=2}^{n+1} (t_i - t_1)(y_i - y_1) / \sum_{i=2}^{n+1} (t_i - t_1)^2 \quad (8)$$

となるが、この値の分散を計算すると

$$\sigma_{\tilde{a}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (t_i - t_1)^2} + \left\{ \frac{\sum (t_i - t_1)}{\sum (t_i - t_1)^2} \right\}^2 \sigma^2 \quad (9)$$

となる。この値は (i) における (5) 式よりも大きいのであるが、時間の原点 t_1 をこれら測定時点の中央に選べば (9) 式の第 2 項は消え (i) の場合と同じとなる。

