Vol. 29 No. 149 電波研究所季報 February 1983
pp. 55—63

3. 周波数・時間計測における相対論効果

佐分利 義 和*

1. まえがき

原子時計の性能は，正確さではセシウム・ビーム標準器により 1×10^{-13} 以上，一方，短期安定度としては，水素メーザにより 10^{-15} 台に達し，今後の新方式標準器，例えばイオン・ストレージ形あるいはレーザ光によるポンピング及び光検出のビーム標準器では，更に2けた程度の向上も予測されている．

一方，原子時計の利用も各種科学分野に広まり，世界各地はもとより，航空機，更に衛星搭載へと，使用条件が空間的に広がり，かつ静止から運動を伴うようになった．更に，これらの利用においては，時計間の精密同期を 1 ns 又はそれ以上の精度でとりたいという要望もでてきている．

このように高精度かつ広域での時間計測が必要となってきた現在では，空間全域にわたって通用する時間，すなわち，絶対時間という古典的概念あるいは近似では済まされないことになった．時間と空間を含めた四次元座標の時空の考え方による相対性理論の効果を単に概念としてではなく実用面で考慮し，補正しなくては，測定に矛盾を生ずることになる．

幸い，地球近傍での重力場は弱く，かつ対象とする速度も遅いので，重力ポテンシャル効果，二次ドップラ効果及び回転効果の三つについて，現状では十分な精度で補正することができる．以下，これらの効果に必要な概念，補正式及び実験結果の概要を述べることにする．

2. 相対論効果の概念

1905年アインシュタインが“運動物体の電気力学”と題した論文，すなわち，特殊相対論を示したことにより，空間的に離れた2点での事象の同時性は座標系，すなわち，観測者によって異なる相対的なものであることが明らかにされた．このことは慣性座標系，すなわち，外力のない等速直線運動の場合について述べられたが，その後1916年には重力場の導入，したがって加速度運動も含めて一般化され，いわゆる一般相対性理論が示されて四次元時空の概念が確立され，絶対時間（長さも同じく）の概念は否定されたわけである．

相対論は物理的思想の性格からいっても，更にそこで使われる数学からいってもかなり複雑なものであり，これらを本稿で示すことは，種々の面から不可能なことである．一般相対性理論が示されて以来，理論の訂正もほとんどなく60数年を経過しており，この間に多くの参考書，また，相対論効果には，いわゆる常識が通用しないことがあるため，数え切れぬ解説書，更に最近の宇宙への関心の広がりのために SF 的なものも多く見られる．したがって，深く知りたい方はこれらを参考していただくことにして，ここでは極めて簡単に時間，周波数計測に関係する事柄の初歩的なものを述べておきたい．

2.1 特殊相対論効果

まず，特殊相対論においては，二つの公理，すなわち，(1)物理法則はどの慣性座標系においても同じ形に書かれる（相対性の原理），(2)光速は光源の運動に無関係である（光速不変）が基本になっており，時間と空間とを一体化して扱う座標変換，すなわち，ローレンツ変換が導入されている．これは，一つの出来事を二つの系で観測した場合の観測値を結び付ける関係式である．いま簡単な例として，ある二つの系，S 及び S′ 系があり，それぞれの四次元座標を (x, y, z, t) 及び (x', y', z', t')，空間座標は直角座標で，時刻 $t=t'=0$ では両座標原点は一致し，かつ対応する各軸は平行しているものとする．ここで，S′ 系が x 方向に S 系に対して速度 v の等速直線運動をしているとすると，一つの出来事を二つの系から見た座標は次式で関係づけられる．まず，S 系の座標から S′ 系への変換として，

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-vt)/\sqrt{1-(v/c)^2}, \\ y' &= y,\ z'=z, \\ t' &= (t-vx/c^2)/\sqrt{1-(v/c)^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1)$$

の公式が，逆に S′ 系の座標から S 系への変換としては，

$$\left.\begin{aligned} x &= (x'+vt')/\sqrt{1-(v/c)^2}, \\ y' &= y,\ z'=z, \\ t &= (t'+vx'/c^2)/\sqrt{1-(v/c)^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

となる．これらがローレンツ変換であり，運動方向の座標と同時に，時間の座標も変換されることが示されている．このような変換のために，以下の例のように日常の経験にはないようなことが現れることになる．

(1) 同時性　：　二つの地点での出来事の同時性，あるいは2地点に置かれた時計の同時刻の判定には，アイ

*総合研究官

ンシュタインは光パルスを用いた測定を想定している．

上述の S′ 系で二つの出来事が座標 (x'_1, y', z', t'_1) 及び (x'_2, y', z', t'_2) でそれぞれ起こったとすると，もし $t'_1=t'_2=t'$ ならば二つの出来事は S′ 系では同時である．しかし，これを S 系に静止している観測者から見ると，ローレンツ変換によって，

$$t_1=(t'+vx'_1/c^2)/\sqrt{1-(v/c)^2}$$

$$t_2=(t'+vx'_2/c^2)/\sqrt{1-(v/c)^2}$$

となり，その差は，

$$t_2-t_1=v(x'_2-x'_1)/c^2\sqrt{1-(v/c)^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

となり，一般には $t_2-t_1 \fallingdotseq 0$ で S 系では同時ではないことが明らかであり，同時性は座標を指定してのみ意味のあることがわかる．

(2)　運動時計の遅れ

S′ 系の同一の場所 $x'_1=x'_2=x'$ において二つの出来事がそれぞれ t'_1, t'_2 に起こった場合，S′ 系での時間間隔は $t'_2-t'_1$ となるが，これを S 系から見た場合，ローレンツ変換式によって，

$$t_2-t_1=(t'_2-t'_1)/\sqrt{1-(v/c)^2} \quad \cdots\cdots(4)$$

となる．このことは，観測者から見て v なる速度で運動している時計は遅れることを示している．

(3)　ドップラ効果

S 系での波動の位相が次式で，すなわち

$$exp\, i(-\omega t+k_x x+k_y y+k_z z)$$

で示されるとき，これを S′ 系で見ると，t 及び x にローレンツ変換を行い，次式となる．

$$exp\, i[\{(-\omega+k_x v)/\sqrt{1-(v/c)^2}\}t' + \{(k_x-\omega v/c^2)/\sqrt{1-(v/c)^2}\}x' + k_y y'+k_z z']$$

この式から S′ 系における角周波数 ω' は，

$$\omega'=(\omega-k_x v)/\sqrt{1-(v/c)^2}$$

となる．波数ベクトルを単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて表すと，$\boldsymbol{k}=(\omega/c)\boldsymbol{n}$ となるので，S 系に対する S′ 系の速度を $\boldsymbol{v}$ とおくと，一般式として次式が得られる．

$$\omega'=\omega\cdot\frac{1-\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\omega\cdot\frac{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで θ は電磁波の進行方向と S′ 系の運動方向の成す角で，方向が一致する場合には，縦ドップラ効果，

$$\omega'=\omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \cdots\cdots(6)$$

また，方向が直交する場合には，横ドップラ効果，

$$\omega'=\omega\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \cdots\cdots(7)$$

を生ずることになる．以上が周波数，時間計測に現れる特殊相対性理論の効果の主なものであり，このほか運動方向への長さの短縮なども同様に導かれるが，ここでは省略する．

以上の説明で，時間は三つの空間座標とともに座標的な役割をし，座標系のとり方によって変化する相対的なものであることを示したが，これはある物体の運動を記述するために用いた座標系に結び付いた時間という意味で座標時（coordinate time）と呼ばれる．しかし，物体に対して静止している座標系に結び付いた時間，言い変えると理想時計があり，これがたとえ運動しているとしても，その時計の示す時間があり，これを固有時（proper time）と呼ぶ．この固有時は，物体内で起こるすべての物理過程が従うべき時間であって，どの座標系から観測したものであるかには関係のない不変量である．

前述の例と同じく，ある物体が座標系 S から見て v なる速度で x 方向に等速直線運動をしている場合に，この物体が静止しているような座標系 S′ を考えると S′ の座標時は物体の固有時と同じになる．いま，二つの出来事がこの物体に起こった場合を考え，それを S 座標で (x_1, t_1)，(x_2, t_2) とすると，固有時 (τ) と S 座標の座標時 (t) の関係は既に述べたように次式で示される．

$$\tau_2-\tau_1=\sqrt{1-(v/c)^2}\cdot(t_2-t_1)$$

この式に，$v=(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$ の関係式を代入すると次式の表現が得られる．

$$(\tau_2-\tau_1)^2=(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2/c^2 \quad \cdots\cdots(8)$$

いま，座標系 S からの観測の代わりに，S に対して x 方向に u なる速度で動く座標系 $S''(t'', x'')$ からの観測を行うこととする．この場合 x_1, x_2 及び t_1, t_2 を(2)式の変換式を用いて x_1'', x_2'' 及び t_1'', t_2'' で表し，これを(8)式の右辺に代入すると，

$$(\tau_2-\tau_1)^2=(t_2''-t_1'')^2-(x_2''-x_1'')^2/c^2 \cdots\cdots(9)$$

が得られ，固有時の間隔は，座標系を変えても，同一の式で表されることが示される．

以上の関係から，座標時の二つの時刻 t_1 及び t_2 の間に経過する物体の固有時の間隔は，物体が等速直線運動をしていない場合でも，次の積分で求めることができる．

$$\tau_2-\tau_1=\int_{t1}^{t2}\sqrt{1-(v/c)^2}\,dt \quad \cdots\cdots(10)$$

また，(8)式及び(9)式から推定できるように，微分形式で一般的に示すと，

$$d\tau^2=dt^2-\frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2) \quad \cdots\cdots(11)$$

又は，

$$ds^2=c^2d\tau^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2) \quad \cdots\cdots(12)$$

の関係式が導かれる．(12)式は四次元時空での計量（メトリック）を表す式と呼ばれ，ds は四次元距離の微分量

ということになる．

例えば，ある座標系で見て，v なる速度で運動している理想時計の固有時（τ）と座標時（t）の関係は，

$$(vdt)^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

の関係を⑿式に代入すると，

$$d\tau=\sqrt{1-(v/c)^2}\cdot dt \qquad \cdots\cdots(13)$$

が得られ，⑽式あるいは⑷式と同一の結果を得る．

特殊相対論によって，上述のもの以外に，速度の合成，運動する座標系から星を観測する場合の光行差，更に質量，エネルギーといった量などについて新しい重要な概念が導かれるわけであるが，ここでは省略する．

2.2 一般相対論効果

前項では外力の働かない場合，すなわち，慣性系のみが取り扱われ，また，重力の問題も含まれていない．一般相対論では，⑴物理法則は慣性系のみでなく，いかなる座標系に対しても同じ形式をもつという一般相対性の原理，次に⑵重力と加速度による見掛けの力とは，すべての物理現象に対して同じ効果であるという等価原理を基本としている．等価原理によって，例えば自由落下するエレベータ内で見られるように，ある物体の近傍での重力は局所的に打ち消すことができるので，その物体の従うべき物理法則は特殊相対論により知ることができ，これに一般相対性原理により一般的な座標変換をすると重力場にある場合の物理法則が得られることになる．

重力場を含む四次元時空での2点間の距離の微分量は⑾式を一般化した次式で与えられる．

$$ds^2=-c^2d\tau^2=\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}dx_idx_k \qquad \cdots\cdots(14)$$

ここで，x_0，x_1，x_2，x_3 が四次元座標で⑿式の ct，x，y，z にそれぞれ対応する．係数 g_{ik} については，⑿式の場合，$g_{00}=-1$，$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$ で，ほかはすべて零という特殊の場合と考えることができるが，一般には，$g_{ik}=g_{ki}$ の条件のみが許され，したがって10個の独立成分となり，かつ，場所によって変化するものとなる．これら10個の g_{ik} によって重力ポテンシャルが示されているわけで，物質の分布状態によって，g_{ik} の従うべき制約があり，これがアインシュタインの重力法則で，難解な連立偏微分方程式である．

⑿及び，⒁式は四次元時空の幾何学的概念を示しており，慣性系に対応するものは平坦な空間であり，一方，重力場を含む非慣性系のものは，曲率をもつ非ユークリッド空間的なものになり，曲線座標の導入が必要となる．g_{ik} の勾配が場所によって，どのような割合で変化するかが曲率に関するということで，真の重力と一定加速度の場合の見分けがつくわけで，このことが等価原理による重力の打ち消しが局所的であるということの理由でもある．

等価原理が慣性質量と重力質量の等しいことを意味していることと，エネルギー E は E/c^2 の慣性質量をもつということを考えると，光も重力によって曲がること，重力ポテンシャルの低いところでは光の見掛けの速さは遅くなることなどが推論される．このことによって，慣性系を取り扱う特殊相対論でのように，光信号を用いて同時性や長さの測定を行う方法はそのままでは誤差を含み使用できないことになり，重力場とその中での運動方程式によって理論的な補正をする必要がでてくる．

アインシュタインの重力方程式の完全解は数少ないが，その中で，質量 M が球対称分布をしている場合の解は有名な Schwarzchild の解と呼ばれ，地球近傍での原子時計を取り扱う場合に適用できる．

$$\begin{aligned} ds^2=-c^2d\tau^2=&-[1+(2U/c^2)]c^2dt^2 \\ &+[1+(2U/c^2)]^{-1}dr^2 \\ &+r^2(d\theta^2+\cos^2\theta\cdot d\phi^2) \qquad \cdots\cdots(15) \end{aligned}$$

又は，

$$\begin{aligned} ds^2=-c^2d\tau^2=&-(1+2U/c^2)c^2dt^2 \\ &+(1+2U/c^2)^{-1}(dx^2+dy^2+dz^2) \quad \cdots(15') \end{aligned}$$

ここでは，球座標 (r,θ,ϕ) が用いられ，r は質量 M の中心からの距離，θ は赤道面からの緯度方向，ϕ は経度方向の角度であり，U は $-GM/r$ で重力ポテンシャル，G は万有引力（重力）定数である．

この式で示されるように，g_{ik} が距離 r，すなわち，場所によって変化するようになり，慣性系とは異なったものとなる．⒂式の時空内での粒子の運動を計算すると，例えば光が太陽の近傍を通過する場合には，太陽側に屈折し，最も近づいた距離を R とするとき，ずれの角度（δ）は $\delta=4GM_S/R_c^2$ となり，太陽表面をかすめる光では約1.75秒角となり，VLBI の観測では考慮しなければならない．また同様に，太陽の周りの遊星の楕円軌道は，近日点が1周ごとに移動するという結果が得られ，古くから観測されていた太陽に最も近い水星の近日点移動の説明が与えられる．⒂式で $r=2GM_S/c^2$ では特異性が現われ，更にブラック・ホールといった現象も想定されるようになる．

ある点に静止している時計の場合，⒂式において，$dr=d\theta=d\phi=0$ とおけるので，直ちに次式が得られる．

$$d\tau=[1+(2U/c^2)]^{1/2}dt\simeq(1-GM/rc^2)dt \qquad \cdots\cdots(19)$$

すなわち，質量 M の近傍では，時計の示す固有時 τ は座標時 t に比較して遅れることになり，無限遠で座標時と等しくなることがわかる．太陽の重力ポテンシャルによるシフトは太陽及び地球表面でそれぞれ約 10^{-6} 及

び 10^{-8} である．この効果は，スペクトル線のレッド・シフトとしても同様に生ずる．

更に，重力ポテンシャル U の空間を速度 v で運動する時計については次式が得られ，地球近傍での原子時計への基本式として使用される．

$$d\tau \simeq [1+(2U/c^2)-(v/c)^2]^{-1/2}dt \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\simeq [1-(GM/rc^2)-(v^2/2c^2)]dt \quad \cdots\cdots(18)$$

3. 地球近傍での相対論効果

我々が地球近傍で時間計測を行う場合，太陽，地球，月などの重力場の中での地球の公転及び自転運動を考慮したうえで，時計の運動による効果を考えなければならない．また，後述のように通常の測定は地球の自転運動によって，回転座標系上で行われているという点に気をつける必要がある．以下，主なものについて概要を述べてみたい．

3.1 太陽の影響

地球近傍の天体の影響としては，質量の大きさから太陽の重力ポテンシャルによる効果が最も大きく，(15)式で地球の公転楕円運動を考慮すると，太陽の中心に原点をもつ座標系の座標時 t と，地球の位置にある原子時計の刻む固有時の関係は次式で示される[(1)~(3)]．

$$dt=(1+1.48119\times 10^{-8}+3.3079\times 10^{-10}\cos f)d\tau \quad \cdots\cdots(19)$$

ここで，f は真近点離角で地球の公転楕円軌道の長軸に対して太陽と地球とを結ぶ動径の成す角である．この式の右辺括弧内の第2項は太陽の重力ポテンシャル内での地球の運動による平均的な固有時の遅れを示し，第3項は楕円運動に基づく平均からのずれに対応する年周変動を示している．

年周項を積分すると，時計の読みの変動が得られ，地球の固有時は座標時に対し春には1.7ミリ秒遅れ，秋には1.7ミリ秒進むことになる．月，木星によっても同様な効果が起こるが，その程度は約3けた小さい．

これらの効果は，地球近傍の全時計に共通のものであり，重力波，パルサーなどの特殊な精密天文観測などを除き一般には考慮する必要がないし，実際の測定は不可能である．

以上の取扱いは，厳密には地球の質量中心の運動についてであり，例えば地球上に固定された時計でも真夜中のものと，正午の位置では地球の直径だけ太陽からの距離に差があり，自転運動を考えると日周変化の可能性もある．しかしながら，太陽による重力ポテンシャルの変化分と公転運動に伴う遠心力の変化（軌道速度による二次ドップラ効果とも考えられる）はほぼ打ち消しあうので，日周変化は現状では考慮しなくてよいことが示されている[(4)]．このことは，近似的には次のように理解できる．すなわち，重力ポテンシャル効果による差は，

$$\Delta f_p/f_p=(GM_S/c^2)\{(R-r)^{-1}-(R+r)^{-1}\}$$

$$=2M_SGr/c^2(R^2-r^2) \quad \cdots\cdots(20)$$

で示され，ここで G：重力定数，M_s：太陽質量，R：地球の公転軌道の半径，r：地球の半径であり，8×10^{-13} の周波数差となる．

一方，軌道速度の差によるシフトは，

$$\Delta f_v/f_v=\{(R-r)^2-(R+r)^2\}\omega_0{}^2/2c^2$$

$$=-2Rr\omega_0{}^2/c^2$$

で示され，ここで ω_0：公転の角速度である．しかし，ニュートン力学による近似，すなわち，$R\omega^2=M_SG/R^2$ を上式に代入すると次式が得られる．

$$\Delta f_v/f_v=\Delta(v^2)/2c^2=-2M_SGr/c^2R^2 \quad \cdots\cdots(21)$$

(20)と(21)式とを比較し，$r=6.3\times 10^8$ cm に対し $R=1.5\times 10^{13}$ cm 程度であることを考慮すると，ほぼ完全に重力効果と遠心力効果の変動分が打ち消しあっていることがわかる．より厳密な取扱いは noon-midnight 効果として文献(4)の付録に述べられているが，地球の質量中心では重力と遠心力とが打ち消されていることを考えて，全ポテンシャル（U）の展開を行い，その変化分の一次項のみを取り出して影響を見ることもできる[(5)]．

$$\Delta U=-\frac{3}{2}\frac{GM_S}{R^3}r^2\cos^2\omega t \quad \cdots\cdots(22)$$

したがって，$\Delta U/c^2$ が周波数変化量であるから，

$$\Delta f/f=-\frac{3}{2}\frac{GM_S r^2}{c^2R^3}\cos^2\omega t \quad \cdots\cdots(23)$$

となる．ここで ω は地球の自転角速度であり，変動の振幅は太陽によるものは -2.69×10^{-17}，月によるものは -5.85×10^{-17} となる．潮汐力によるこの日周効果は，現在の精度では無視できる量であるが，将来は考慮すべきものの一つとなろう．

地球の公転及び自転運動に関連して，例えば公転面に対する自転軸の23.5°の傾きの効果として，地上の原子時計の固有時の間には緯度の差による季節変化[(6)]があるとか，また，ジオイドからの高さと緯度との復合効果による差異[(7)]があるとの論文も発表されたが，これらは解析の過程で誤りのあることが指摘されている．

以上のように，地球上の原子時計に対する太陽の影響は，現在の精度ではすべての原子時計に共通のものとして取り扱われるので，原子時計間の比較，測定には考慮する必要がないことになる．しかしながら，天文観測やVLBI 観測などで，太陽を原点とする座標，すなわち，日心座標を使用した座標時を取り扱う必要のある場合には注意しなければならない．詳しい解析は文献(8)に述べられており，例えば VLBI 観測での二つのアンテナに

波面が到達する時間差，すなわち，原子時計の固有時によって測定される geometric delay を coordinate time delay に変換する際には，近似的に公転速度で走っている慣性系での測定となるので，特殊相対論での同時性を考慮した補正，すなわち，光行差の日周変動を補正すべきことを示している．

3.2 地表上の静止時計

前項3.1で述べたように，地球近傍での原子時計相互の比較には，太陽の影響は共通のオフセットとして考慮する必要がないので，地球の重力ポテンシャル及び自転運動のみを取り扱えばよい．(15)又は(15′)式を用いて，地心を原点とする座標時と固有時の関係を求めることができるが，実際の測定は地球に固定した座標系，すなわち，自転角速度（ω）で回転する回転座標系の表現が便利なことが多い．このためには，(15)式では，

$$x'=x\cos\omega t+y\sin\omega t$$
$$y'=y\cos\omega t-x\sin\omega t$$
$$z'=z$$

の変換を，また，式(15′)では，

$$\phi'=\phi-\omega t$$

の変換を行い，記号のダッシュを取り去ると次式となる．

$$\begin{aligned}ds^2=-c^2d\tau^2=&-(1+2U_T/c^2)c^2dt^2\\&+(1+2U_T/c^2)^{-1}(dx^2+dy^2+dz^2)\\&+2\omega(xdy-ydx)dt\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(24)$$

又は，

$$\begin{aligned}ds^2=-c^2d\tau^2=&-(1+2U_T/c^2)c^2dt^2\\&+(1+2U_T/c^2)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\cos^2\theta d\phi^2)\\&+2\omega r^2\cos^2\theta d\phi dt\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(24')$$

ここで，U_T は回転系での全重力ポテンシャルで

$$U_T=U-\frac{1}{2}r^2\omega^2\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots(25)$$

であり，右辺第2項が回転による遠心力の成分を示している．(24)，(24′)式のそれぞれの最後の項は，回転座標系に特有のものである．

地表上に静止している時計の固有時と地心を原点とする座標時との関係は，(24)式において $dx=dy=dz=0$ として，次式が得られる．

$$d\tau=(1+U_T/c^2)dt \qquad \cdots\cdots(26)$$

(16)式と対比すると，U が U_T となり回転効果が加わっており，地表近傍では地球の重力ポテンシャルにより，約 7×10^{-10} の固有時の遅れとなることが示される．

地表付近で異なる地点に静止している時計の間の相対論効果による周波数差は，U_T の差を $\varDelta U_T$ とすると，

$$\varDelta f/f=\varDelta U_T/c^2$$

となる．U_T の勾配が重力加速度（g）であることから，海水面からの高さ h にある時計と，海水面に静止している時計との周波数差は次のようになる．

$$\varDelta f/f=g(\theta)h/c^2 \qquad \cdots\cdots(27)$$

ここで，$g(\theta)=9.7803+0.0519\sin^2\theta(m/s^2)$，$\theta$ は緯度である．この $g(\theta)$ には地球の偏平度が考慮されており，例えば，緯度40°では，高さ 1 km 当たり，周波数は $+1.09\times10^{-13}$ 高くなることになる．重力異常のために，ジオイドの分布は回転楕円体による計算値からの偏差が場所によって，最大約 −100 m から +85 m の範囲であるので，世界的分布図（例えば理科年表）によって確かめることが必要である．

3.3 地表近傍で運動する時計

対地速度 v で運動する時計の固有時 τ と地心座標による座標時 t との関係は，(24′)式において，

(1) dr^2 の係数，$(1+2U_T/c^2)^{-1}$ はほぼ1に近い，

(2) $(vdt)^2=dr^2+(rd\theta)^2+(r\cos\theta d\phi)^2$

とおくと，近似的に次式が得られる．

$$d\tau=\left(1+U_T/c^2-\frac{v^2}{2c^2}\right)dt-\frac{\omega}{c^2}r^2\cos^2\theta\cdot d\phi \qquad \cdots\cdots(28)$$

又は，

$$\frac{d\tau}{dt}=1+U_T/c^2-\frac{v^2}{2c^2}-\frac{\omega}{c^2}r\cdot\cos\theta\cdot v_E \qquad \cdots\cdots(29)$$

ここで，v_E は速度 v の東方向の成分である．

(28)式を運動通路に沿って積分すると，運動期間中に固有時の経過する時間 τ と座標時 t との関係が求まる．

$$\begin{aligned}\tau=&\int_{path}(1+U_T/c^2-v^2/2c^2)dt\\&-\frac{\omega}{c^2}\int_{path}r^2\cos^2\theta d\phi\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(30)$$

この式で，右辺第1項の積分のうち，括孤内の第2項は，(26)式と同じく地球上での全重力ポテンシャルによる効果，また，第3項は速度に対する二次ドップラ効果である．右辺第2項の積分は回転座標系に特有の項であり，運動の向きに依存する．

海水面に静止している時計に対して，高さ h，対地速度 v で運動する時計のずれ $\varDelta\tau$ は，(30)，(27)式によって，次式となり地表近傍での測定に適用できる．

$$\begin{aligned}\varDelta\tau=&\int_{path}\left(\frac{g(\theta)h}{c^2}-\frac{v^2}{2c^2}\right)dt\\&-\frac{\omega}{c^2}\int_{path}r^2\cos^2\theta d\phi\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(31)$$

右辺第2項の積分を含む回転効果は，

$$\varDelta\tau_r=-\frac{\omega}{c^2}\int_{path}r^2\cos^2\theta d\phi=-\frac{2\omega A_E}{c^2} \qquad \cdots\cdots(32)$$

と表せる．ここで，A_E は運動時計の位置ベクトル $\vec{r}$ の赤道面への投影が，運動経路に従って描く面積であり，東向きの場合を正にとる．この効果は次に述べる電波による時計比較にも同様に現れる．

同様にして，(29)式より，運動する時計の周波数は海水面に静止している時計の周波数に対して，次式の差を生ずることがわかる．

$$\Delta f/f=\frac{g(\theta)h}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{c^2}\omega r\cos\theta\cdot v_E \qquad \cdots\cdots(33)$$

例えば，緯度40°を高度9 kmで，対地速度270m/sで東へ飛行する時計の周波数は，

$$\Delta f/f=9.82\times10^{-13}-4.06\times10^{-13}-10.71\times10^{-13}=-4.95\times10^{-13}$$

海水面の時計の周波数より低くなることがわかる．

地表付近での2地点での回転による遠心力の効果も含めた全重力ポテンシャルの差 ΔU_T に，(27)式のように近似的に $g(\theta)h$ を用いることは，航空機あるいは地表上では十分の近似であるが，高さ h が50 km以上，すなわち，人工衛星を取り扱うような場合には地球形状の球からのずれを考慮した次式を用いるのがよい．

$$\Delta U_T=-GM_e\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a_1}\right)-\frac{1}{2}\omega^2(r^2\sin^2\theta'-a_1{}^2)+\frac{J_2GM_e}{2a_1}\left[1+\left(\frac{a_1}{r}\right)^3(3\cos^2\theta'-1)\right] \qquad \cdots\cdots(34)$$

ここで，r は地心からの距離，θ' は余緯度，その他の定数は，(34)式に直接出てこないものも含めて，参考のため以下に示しておく．

G：重力定数　6.672×10^{-11} m³/kg/s²
M_e：地球の質量　5.9742×10^{24} kg
M_S：太陽の質量　1.9891×10^{30} kg
a_1：地球の赤道半径　6.38814×10^6 m
ω：地球の自転角速度　7.2971×10^{-5} s⁻¹
J_2：地球の四重極モーメント係数　$+1.083\times10^{-3}$
c：光速　299 792 458 m/s
$g(\theta)$：重力加速度(ジオイド)　$9.7803+0.0519\sin^2\theta$ m/s²
$2\omega/c^2$：回転効果の係数　1.6227×10^{-6} ns/km²

3.4 電波による時計比較への効果

光，電波の真空中の伝搬に対しては，例えば(12)式のなかで，光速度 c で進むことを考えれば，

$$dx^2+dy^2+dz^2=v^2dt^2=c^2dt^2$$

の条件から，$ds^2=d\tau^2=0$ ということが明らかである．しかしながら，地球上での測定のように回転座標系に変換して見ると，(12)式は次式になる．

$$ds^2=-[1-\omega^2(x^2+y^2)]c^2dt^2+2\omega(xdy-ydx)dt+dx^2+dy^2+dz^2 \qquad \cdots\cdots(35)$$

この式で，電波の伝搬に対する上述の条件から左辺は零となるから，dt についての二次式が得られるので，地球の近傍については十分なりたつ近似，$\omega^2(x^2+y^2)\ll c^2$ を入れると，dt について次式の解が得られる[9]．

$$dt=\left[1+\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2c^2}\right]\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c}+\frac{\omega}{c^2}(xdy-ydx) \qquad \cdots\cdots(36)$$

この式を伝搬経路に沿って積分すれば，伝搬に要する時間が求まる．右辺第1項は上述の近似を考慮すれば，経路全長を光速で割った通常の伝搬時間であるが，第2項が加わっている．この項の積分を Δt_r とすると，

$$\Delta t_r=\frac{\omega}{c^2}\int_{path}(xdy-ydx)=\pm\frac{2\omega}{c^2}A_E \qquad \cdots\cdots(37)$$

ここで，A_E は光の経路の x—y 面，すなわち，赤道面への投影と原点とが囲む面積であり，＋符号は東向きの経路の場合で遅れとなり，－符号は西向きの場合で進みとなる．回転座標系上では，光の伝搬速度が方向によって異なって見えるわけで，回転円板上での光による実験が1914年に Sagnac により初めて行なわれたので，これを Sagnac 効果[10]と呼んでいる．赤道上を1周するような経路の場合には 0.2 μs に達し，静止衛星経由の大陸間通信では 0.33 μs にもなるので，最近の運搬時計あるいは衛星による国際間の高精度比較ではこの項の補正を欠くことはできない．

以上，地球近傍で静止又は運動する時計への相対論効果及び電波による時計比較に現れる効果について述べたが，上述の補正を行えば少なくとも 1 ns 又は 1×10^{-14} 以上の精度で矛盾なく取り扱うことができる．移動衛星による時計比較など種々の具体例については，文献(11)を参照されたい．

4. 相対論効果の実験例

相対論効果の実験的検証は従来から太陽などの天体に関連したものが多く，現在でも例えば深宇宙探査用衛星の信号によって太陽の周りの時空のひずみの測定，VLBI 観測による太陽近くでの電波の屈折など実験が続けられている．地球近傍での実験としても，高エネルギー物理の分野では特殊相対論効果は古くから実用的にも欠かせないものとして補正されているが，ここでは原子時計の高精度化に伴い可能となってきた実験を主に，時間・周波数分野に関係の深いものを紹介しておく．

4.1 二次ドップラ効果

原子時計では一次ドップラ効果は除去するよう工夫されているが，スペクトル観測のための電磁波は実験室の座標に固定されており，これに対して原子は一般に運動しているので，特殊相対論効果による横ドップラ効果によるシフトがあり，(7)式による補正が必要である．例えば，セシウム・ビーム原子時計では遷移にあずかる原子群の速度分布を実測又は計算により，また，水素メーザでは原子の蓄積されるバルブの温度から計算によって，それぞれ約 5×10^{-13} 及び 4×10^{-11} のシフトを補正している．

4.2 地球の重力ポテンシャル

地表近傍で海水面からの高さ 1 km 当たり 1.091×10^{-13} の周波数増加となることは，3.2において述べた．原子時計を山頂に運ぶ実験も試みられているが，相対論効果のシフト量と運搬可能な小形原子時計の安定度とが同程度であるため，あまり高精度の検証は得られていない．

最も有名，かつ最初の実験[12]は原子核の γ 線での遷移周波数の観測で，地上 22.6 m の高さの差によるものである．γ 線のように極めて高い周波数では，例えばガス状態の自由な原子核スペクトルは反跳のために自然幅より大きな周波数シフトを生じて観測が難しくなる．しかし，結晶格子の中で束縛された原子核を用いて反跳のない，強くかつ高分解能分光法が発見され，これをメスバウア効果と呼んでいる．重力ポテンシャルによるシフトの実験では約1%の精度が得られており，また，回転円板による遠心力の効果の実験[13]もなされている．

各国標準研究所のセシウム原子時計による原子時にも当然この効果が積算されていくわけで，ジオイドからの高さが 1650 m ある NBS の場合には，約 1.8×10^{-13} 周波数が高いわけで，これを補正する必要がある．

4.3 運動する時計

a）航空機による実験

国際時刻比較のために，原子時計をジェット機で運搬する方法が使用されてきているが，このような場合は(31)式を用いて，地表に静止している時計に対して運搬時計に補正すべき量を計算できる．

例えば，米国海軍天文台のあるワシントンからハワイを経由して東京までの飛行において，それぞれ大圏経路を高度1万m，対地速度 900 km/hour，全飛行時間を約15.5時間として計算すると，重力ポテンシャルによる項は 60.8 ns の進み，二次ドップラの項は 19.4 ns の遅れ，回転効果の項は西向きのため 45.7 ns の進みとなるので，全体で 87.1 ns の進みとなる．逆に東京からワシントンへの帰路については，回転効果の符号が変わり 45.7 ns の遅れとなるので全体として 4.3 ns の遅れとなる．比較精度向上のために往復期間中の原子時計の歩度を補間する場合には，この効果を考慮する必要がある．

この種の初の実験[14]は1971年に4台の小形商用セシウムをジェット機により東回り及び西回りで世界一周して行なわれた．飛行中の時計の動きは相互比較により監視されたが，一般の航空路線を利用したため，精密なフライト・データが無く，精度よく理論値を求めることができなかった．しかし，測定結果は，地表に静止していた時計に対し，東回りの時計は 59±10 ns（計算値 40±23 ns）の遅れ，西回りの時計は 273±7 ns（計算値 275±21 ns）の進みとなり，原子時計を用いて初めて相対論効果を示すことができた．

より精密な実験[15]が1975年に米国で行われた．航空機は約15時間の周回飛行をし，その高度及び位置は地上からのCバンド及びKバンドのレーダで常時測定され，更に機上の原子時計と地上の原子時計はレーザ・パルスによって約 0.3 ns の精度で比較された．この場合，実測値は計算値と 1.6% の一致をみた．

b）ロケットによる実験

1976年に水素メーザをロケットに搭載し，飛行中の周波数が地上のものと比較測定された[16]．この場合，ロケットの運動によって生ずる一次ドップラ周波数シフトが 2×10^{-5} に達するが，一方，相対論効果は最大で 4×10^{-10} であり，この種の検証実験の難しさがある．しかし，この実験では実時間で一次ドップラ効果を消去する方法がとられた．すなわち，搭載水素メーザの周波数を地上に送信するとともに，地上の水素メーザの周波数を基準としたSバンド信号をロケットに送信し，これを再び地上に送り返すことにより，一次ドップラ効果によるシフトを除いている．実験値は計算値と約 2×10^{-4} で一致し，時計を用いた実験としては最高の精度を示した．

4.4 電波による時計比較

地球上での電波による時刻比較には自転運動のためにサニャック効果の補正の必要なことは，3.4に述べたとおりである．

電波によるこの効果の初の検証が，電波研究所が静止衛星 ATS-1 を用いて行った1975年の日米間時刻比較[17]で明確に示された．この比較システムは PN コードによるスペクトル拡散変調方式を使用して，理想に近い two way 方式であり，その測定精度は 1 ns，確度は 10 ns という高精度のものであった．サニャック効果を示す第1の結果は，電波による測定値と同時に実施された運搬時計の測定値との一致の程度である．電波による生の測定値と運搬時計によるものとの差は 0.39±0.2

μs であり，ここで 0.2 μs は運搬時計の測定の不確かさである．しかし，電波による測定値にサニヤック効果の補正約 330 ns を行うと，その差は 0.06±0.2 μs となり，良い一致が得られることである．より明確な第2の結果は，電波による測定値に振幅約 2〜3 ns の半日周的なゆるやかな変動が見られたことである．これは，静止衛星といえどもわずかの傾斜角と離心率のために，いわゆる8の字形の位置の変動があり，このため(37)式の面積 A_E が変化して生ずるものである．観測値とこの計算値とは振幅及び位相の両面ともよく一致した．更に，この結果からみても 3.1 で述べた太陽の重力ポテンシャルによる日周変化は遠心力により打ち消されていることがわかる．

以上，地表付近での主な実験のみを述べたが，興味のある方はこれ以外のものも含めた総合的報告[15]を参照してほしい．

5. 国際的な取扱い

時間，周波数分野で相対論効果の取扱いについて，国際的かつ公式の討議が開始されたのは，原子標準による秒の再定義が具体的に提案され始めた1967年からであり，秒の定義諮問委員会（CCDS）の各国メンバー機関に意見が求められた．この対策のために，我が国でも当時の日本学術会議国際度量衡研究連絡委員会時分科会において，討論がなされ，意見の統一が図られた．この意見には以下のことが述べられている[18]．

(1) Cs 遷移観測にあたり，特定の場所の指定を行えば，秒の定義はその場所における固有時に基づくことになり，指定しなければ個々の場所の固有時になる．

(2) 観測対象が適当な大いさの実験室内に限られた物理測定では固有時の採用で必要かつ十分であるが，対象が実験室外にある場合は一般相対論の補正を必要とする．

(3) 地球上又はその近傍にある原子時計は，天体に由来する引力ポテンシャルの影響を受ける．その大いさの程度は次のとおりである．

太陽一定項	$+1.48\times10^{-8}$
太陽年周変化項	$\pm3.3\times10^{-10}$
太陽最大日周変化項	$\pm6\times10^{-13}$
地球一定項	$+7.0\times^{-10}$
地球上の高度変化項	$-1.1\times^{-13}$/km
木星一定項	$+10^{-12}$ のけた
月一定項	$+10^{-12}\sim10^{-13}$ のけた
木星及び月変化項	$\pm10^{-13}$ 以下

実際にはこれらの各項の幾つかの組合せとして求められ，また，遠隔の原子時計の相互比較のために必要欠くべからざる補正は現在直ちに用いられる形では準備されていないと思われる．

以上のような意見が秒の定義諮問委員会に提出されているが，太陽最大日周変化項については 3.1 に述べたように公転の遠心力ポテンシャル効果による相殺が見落とされていた．

このような国際的討議の結果，秒の定義文には特定の場所の指定はしないことになった．これは，物理法則を求めるための実験室内の一般計測では，その場所の固有時を用いれば必要かつ十分であるということを基礎としたもので，必要があれば相対性理論による補正を行えばよいという考え方である．

しかし，Cs 原子の遷移周波数で定めた秒間隔を積算する原子時や周波数標準について，各国標準研究所間で相互比較をしたり，世界的な統一基準を確立しようとすると固有時のみの考え方では不十分となり，座標時的な概念の導入が必要となる．国際原子時（TAI）の確立にあたり，1970年の CCDS はその規則の中に，TAI の刻む時間間隔は平均水準面（ジオイド）において秒の定義によって示される時間単位に一致するように国際報時局（BIH）が定めるものであると述べてある[19]．このことにより，空間的な基準面を与えたわけである．

国際原子時の高精度化，国際比較の精密化，4. に述べた原子時計による相対論効果の実験などによって，上述の国際原子時の定義及び遠隔地にある時計同士の相互比較に必要な相対論的補正について，より明確な定義をしておくべきであるという議論がでてきた．1980年の CCDS 第9回会合において，TAI は座標時なのか，基準系は，座標変換に必要なモデルは，などの議論がなされ，CCDS としての宣言[20]が作られた．これによると，

(1) TAI は回転ジオイド上で現示される秒の国際単位（SI）尺度であり，また，地心基準系で定義した座標時尺度である，

(2) 現状では，一般相対性理論の一次補正，すなわち，重力ポテンシャル差，速度差及び地球自転に対する補正を行うことによってジオイド近傍のいかなる固定点あるいは移動点にも十分な精度で TAI を拡大することができる．

と述べてあり，脚注として実用的に使用すべき運搬時計及び電波による時刻比較への補正式（本文(31)式及び(37)式と同じ）が示してある．この宣言により，一応公式的な見解が示されたわけであるが，その表現についての厳密さの点で，1981年の国際天文連合（IAU）では更に検討すべきだとしている．

一方，協定世界時（UTC）の定義をはじめ，標準周波数及び報時に関する国際的取り決めを行っている国際無

線通信諮問委員会第7研究委員会（CCIR SG. 7）においても，1970年の第12回総会において始めて座標時系に関する研究プログラムが取り上げられ，重力ポテンシャルの影響のみを考慮した報告[21]が採択されている．1978年第13回総会においては，運搬時計及び電波による補正も含めて報告[23]が作成され，改訂がなされつつ現在に至っている．

6. ま と め

地表近傍での時間，周波数標準分野での測定においても相対論効果の補正が不可欠となっている現状から，また，従来なじみの薄い事柄でもあるので，これら効果のごく基礎的な物理的概念や実験例などについて述べた．アインシュタインの理論そのものの正確さまで議論されている時代ではあるが，実用上，その結論を解釈したり利用するときに過ちを犯さぬよう注意することが必要である．このようなことを避け，また将来，高次の補正を必要とすることを考え，より厳密な数学的取扱いについては専門書を参考にしていただきたい．

参 考 文 献

(1) Clemence, G.M.; "Planetary Distances According to General Relativity", Astron. J., **67**, pp. 379—381, 1962.

(2) Aoki, S.; "Note on Variability of the Time Standard due to the Relativistic Effect", Astron. J., **69**, 3, pp. 221—223, 1964.

(3) Clemence, G. M. and Szebehely, V.; "Annual Variation of an Atomic Clock", Astron. J., **72**, 10, pp. 1324—1326, 1967.

(4) Hoffmann, B.; "Noon-Midnight Red Shift", Phys. Rev., **121**, 1, pp. 337—342, 1961.

(5) Reinhardt, V.; "Relativistic effects of the rotation of the earth on remote clock synchronization", Proc. 6 th PTTI, pp. 395—424, 1974.

(6) Sexl, R. U.; "Seasonal differences between clock rates", Physics Letter, **61 B**, 1, pp. 65—66, 1976.

(7) Cannon, W. H. *et al.*; "Terrestrial Timekeeping and General Relativity—A Discovery", Science, **188**, 4186, pp. 317—388, 1975.

(8) Thomas, J. B.; "Reformation of the relativistic conversion between coordinate time and atomic time", Astron. J., **80**, 5, pp. 405—411, 1975.

(9) Saburi, Y.; "Observed time discotinuity of clock synchronization in rotating frame of the earth", Jour. Radio Res. Labs., **23**, 112, pp. 255—265, 1966.

(10) Post, E. J.; "Sagnac effect", Rev. Mod. Phys, **39**, 2, pp. 475—493, 1967.

(11) Ashby, N. and Allan, D. W.; "Practical implications of relativity for a global coordinate time scale", Radio Sci., **14**, 4, pp. 649—669, 1979.

(12) Pound, R. V. and Redka, G. A.; "Gravitational red-shift in nuclear resonance", Phys. Rev. Lett., **3**, pp. 439—441, 1959.

(13) Hay, H. J. *et al.*; "Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe^{57}", Phys. Rev. Letter, **4**, pp. 165—166, 1960.

(14) Hafele, J. C. *et al.*; "Around-the-world atomic clock; observed relativistic time gain", Science, **177**, pp. 166—170, 1972.

(15) Alley, C. O. "Relativity and clocks", Proc. 33 rd Freq. Control Symp., pp. 4—39, 1979.

(16) Vessot, R. F. C.; "Relativity experiment with clocks", Radio Science, **14**, pp. 629—647, 1979.

(17) Saburi, Y., Yamamoto, M. and Harada, K.; "High-precision time comparison via satellite and observed discrepancy of synchronization", IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-25, 4, pp. 473—477, 1976.

(18) 秒の再定義に関する日本の意見，時分科会資料，38—2, 1967.

(19) Mise en pratique du temps atomique international, Rapport au CIPM, 5ᵉ session CCDS, 1970.

(20) Rapport du Comite Consultatif pour la Definition de la Seconde, 9ᵉ Session—1980, 時小委員会資料，48—2, 1981.

(21) The use of coordinate clocks and local standard (metric) clocks in a terrestrial coordinate time system, Rep. 439, CCIR, 1970.

(22) Relativistic effects in a terrestrial coordinate time system, Rep. 439—2, CCIR, 1978.