研　究

7. 宇宙通信と周波数標準
7.1 太陽系における時刻静止軌道

細川 瑞彦*1　高橋 冨士信*2　吉川 真*3

7. SPACE TELECOMMUNICATION AND FREQUENCY STANDARD
7.1 TIME GEOSTATIONARY ORBITS IN THE SOLAR SYSTEM

By

Mizuhiko HOSOKAWA, Fujinobu TAKAHASHI, and Makoto YOSHIKAWA

Terrestrial Time is defined as the proper time of the atomic time on geoid surface. With respect to this coordinated time scale, the proper time of the satellites or spacecraft varies according to its velocity and the strength of the gravitational field of their position. Here we show that the proper time on the spacecraft is the same as the Terrestrial Time in some appropriate free fall orbits in the solar system. We name them as Time-geostationary orbits.

[キーワード] 座標時，固有時，相対性理論，人工衛星，飛翔体，軌道
Coordinate time, Proper time, Relativity, Sattelite, Spacecraft, Orbit

1. 位置の静止軌道と時刻の静止軌道

地球は自転しており，特別な慣性力を導入することなく運動方程式の成り立つ地心座標系に対して，極軸を中心におよそ 23 時間 56 分（1 恒星日）の周期で回転している．このため赤道上空を 1 恒星日で周回する高度の軌道に人工衛星を打ち上げれば，地表から相対位置が変わらず常に上空の不変な方向に居続ける．ニュートンの力学と重力理論からこの高度は容易に計算できて，地球中心から 4 万 3 千 km 弱，地表からの高度では 3 万 6 千 km 強，という軌道高度が得られる．このことを軌道高度の計算とともに初めて指摘したのは A.C. クラーク，1945 年のことであった[1]．

では時間についてはどうだろうか．本特集第二章に記述されているように物体固有の時間はその物体の運動速度やおかれている場所の重力場などによってすべて異なってしまうことが知られている．都合のよいことに地心座標系においてジオイド上で静止している物体はその固有時は全て等しくなるが，現在では，ジェット機，人工衛星などは高速度で地表を離れたところにまで存在する．このような場合にはそれらの物体の固有時は座標時の基準であるジオイド上の固有時とはずいぶんと違ったものになってしまう．たとえば 300m/s の速度で飛行するジェット機では 12 時間のフライトで 20 ナノ秒の時刻差を生じるし，10km/s の速度で 1 時間少々で地球を周回する低軌道人工衛星は一周ごとに 20マイクロ秒ずつ時刻がずれていく．時間についても地表の標準時と時刻がずれないような衛星軌道はないだろうか，という疑問がこの研究の発端であった．すでに計量テンソルが得られているため，適当な近似のもとではごく簡単な計算で答えが求められる[2]．一般相対論を応用して固有時や周波数の変化を考えるための初歩の練習問題としても好適なもので

*1 標準計測部 周波数標準課
*2 通信システム部
*3 宇宙科学研究所

もあると思われる．計量テンソルを使い慣れてはいないが興味はある，という方は気楽に第二節の式を元に，第三節の式のチェックをしながら読んでいただければ幸いである．

2. 座標時と固有時

本特集第二章で述べたように，我々は時間と空間について共通の基盤を得るために時空の座標系を設定する．座標系を定めることは座標時を定めることも意味する．しかし時空が曲がっている場合，位置と時刻のこの座標系の読みは単なる目盛りであって，真の距離（時間，空間とも）はわからない．特に時間に関しては，個々の物体の時間は固有時で進んでいく．固有時は各々の物体に時計を備え付けていちいち実際に測ることで得られるが，すべての物体に時計を備え付けることは事実上不可能である．もう一つの，そして現実的な方法は，時空内の物質分布を測り，重力場の方程式を解いて計量テンソルを全時空で求めておくことである．

ここではまず，地心座標系をとって考えてみる．この座標系は地球上で生活する我々にとって，運動方程式も特別な補正をせずに成り立ち，一様性，対称性も高く最も便利な座標系の一つである．地心座標系における時系は観念的には地球時 TT（Terrestrial Time）であり，実際に TT を最も正確に使いやすく具体化したものとして国際原子時 TAI がある．

時間の基本単位 SI 秒は，セシウム原子の特定のエネルギー準位間の遷移に伴って放射される電磁波の振動回数で定義される．これは固有時としての秒が定義されたことになるが，座標時が定まったことにはならない．国際原子時における秒の定義はこの SI 秒にさらに場所と運動を指定したものとなっている．すなわち，地球ジオイド面上でジオイド面に固定されたセシウム原子による，となっている．セシウム原子を用いるにせよ，理論的には地球や太陽系天体の影響を受けない無限遠方でのその固有時によって定義する方がすっきりとしたものになる．空間座標については地球中心を原点とした極座標をとり，時間は太陽系の重力場を無視できる遠方での固有時 t を座標時の基準にすると，(r, θ, ϕ) の地点での計量テンソルはポストガリレイ近似のもとで次のようになる[(3),(4)]．

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1+2U/c^2 & & & 0 \\ & 1+2U/c^2 & & \\ & & (1+2U/c^2)r^2 & \\ 0 & & & (1+2U/c^2)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで $U=2GM/r$ は地心座標系での重力ポテンシャル，G は重力定数，M は地球質量である．注意すべきはジオイド面を規定する等ポテンシャルとは，地球上の位置・運動を記述するための地球空間座標系 Terrestial Reference Frame（TRF）での重力ポテンシャルであり，両者は直観的な言い方をすると地球自転の遠心力によるポテンシャルを含めるか含めないかだけの違いがある．遠心力の効果を取り入れる分だけ，仮に地球が球対称だとしてもジオイド面は回転楕円面となる．

地心座標系は地球以外の天体の重力に対しては原点が自由落下している座標系なので，地球中心からあまり遠いところまで考えない限り等価原理により地球以外の天体の重力ポテンシャルの影響は一様なオフセットとして取り除くことが出来る．ここではまず出来るだけ議論を単純化するために，地球が質量 M の球対称な天体であり，他の天体の影響は取り除かれているとして考えてみる．

(1)式より，微小世界線の線素の長さの自乗 ds^2 は各項の係数に計量テンソルの成分が現われ，次のように表される．

$$ds^2=-(1-2GM/rc^2)c^2dt^2 +(1-2GM/rc^2)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad \cdots\cdots(2)$$

ところが，実際問題としては無限遠方に基準時計を置くわけにはいかないし，仮に置いたとしてもその時刻を読みに行くことはできない．実用上は地球時の方がはるかに基準時刻を発生，維持しやすく使いやすい．TAI の基準となる地球ジオイド面上での固有時 t_g を基準とした座標時を導入すると(2)は次のように変更される．

$$ds^2=(1-2GM/rc^2)(1+L_g)^2c^2dt_g^2 -(1-2GM/rc^2)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad \cdots\cdots(2')$$

ここで $(1+L_g)^2$ は，ジオイド面上では $c^2dt_g^2$ の係数が 1 となるよう導入された係数である．L_g は

$$L_g=U_g/c^2=6.969291\times10^{-10} \quad \cdots\cdots(3)$$

であり，U_g は遠心力の分を含めたジオイド面上でのポテンシャルである．

地球中心慣性座標系において，自転しているジオイド面上のただ 2 点，極点のみは自転速度がゼロとなるので静止していることに着目すると，U_g は容易に求められる．ジオイドの極半径 r_P を用いると，(3)は次のようになる．

$$L_g=GM/r_Pc^2=6.969291\times10^{-10} \quad \cdots\cdots(3')$$

(2')，(3)を用いるのは TT を用いて実用的な議論をする際には有用であるが，原理的な問題を考える際にはしばしば議論の複雑化をまねくので，本稿では(2)を基本の式として用い，必要に応じて(3')によってジオイド面のポテンシャルを考慮することにする．

以上，座標系の定義と計量テンソルが与えられれば物体が点Ａから点Ｂまで移動する間に経過する固有時 τ は次のように計算することが出来る．

$$\tau = \int_A^B ds/c \quad \cdots\cdots (4)$$

固有時と座標時の進み方の比は $d\tau/dt$ を求めればよいが，これは結局

$$d\tau/dt = (ds/dt)/c \quad \cdots\cdots (5)$$

となることがわかる．

よく使う数値をまとめておこう．

$r_P = 6.3\times10^6\mathrm{m}$ ；地球ジオイド面の極半径

$2GM/c^2 = 8.9\times10^{-3}\mathrm{m}$；地球の Schwarzchild 半径

3. 固有時の性質と解の存在

単純化のために軌道を赤道面上の，しかも地球中心まわりの円運動に限ることにしよう．このとき，$dr = d\theta = 0$，$\sin\theta = 1$ であり，このような運動をする物体の世界線の長さの自乗は(2)より

$$ds^2 = (1-2GM/rc^2)c^2dt^2 - (1-2GM/rc^2)r^2d\phi^2 \cdots (6)$$

この場合，$d\phi/dt = \omega$（角速度），$r\omega = v$（円運動の速度）となることに注意すると

$$ds^2 = [(1-2GM/rc^2) - (1-2GM/rc^2)v^2/c^2]c^2dt^2 \quad \cdots\cdots (7)$$

が得られる．これから結局，固有時と座標時の進み方の比は，$1/c^4$ に比例するごく小さな量を無視すると

$$d\tau/dt = [(1-2GM/rc^2) - v^2/c^2]^{1/2} \quad \cdots\cdots (8)$$

(8)式から簡単に次のようなことが見て取れる．物体の地球中心からの距離 r を一定に保っておくと，速度が大きくなればなるほど固有時と座標時の比は小さくなっていく．また，速度を一定，例えばゼロと置くと，r が小さくなるほど，$2GM/rc^2$ は大きくなり，従ってやはり固有時と座標時の比は小さくなる．得られた結果を直感的な表現でまとめてみる．

ある物体の時間は，
それが早く動けば動くほど，
大質量の物体の近くにいるほど，
進み方がゆっくりになる．

また，無限遠方で座標系に対して静止している仮想的な時計を座標時の基準とするこの座標系ではジオイド面にあって地球とともに自転している物体の固有時 τ_g と座標時との比は(3')より次のようになる．

$$(d\tau_g/dt) = \{1-(2GM/r_Pc^2)\}^{1/2} \quad \cdots\cdots (9)$$

数値を代入してみると，われわれ地表面にいるものは一年に百分の２秒ほどのびた時間のなかで暮らしていることがわかる[5]．一方地表近くを周回する人工衛星は，ほとんど地表と変わらない重力を受けつつ高速度で飛び回るため，さらに時間の進み方はゆっくりになる．しかし人工衛星は，その軌道の高度が大きいものほど地球との距離も遠くなり速度もゆっくりになる．

地球の回りで円軌道を自由落下する人工衛星の速度はニュートンの運動方程式で十分精度よく求められる．r方向の重力と加速度の釣り合いの式 $v^2/r = G(M/r^2)$ より

$$v^2 = GM/r \quad \cdots\cdots (10)$$

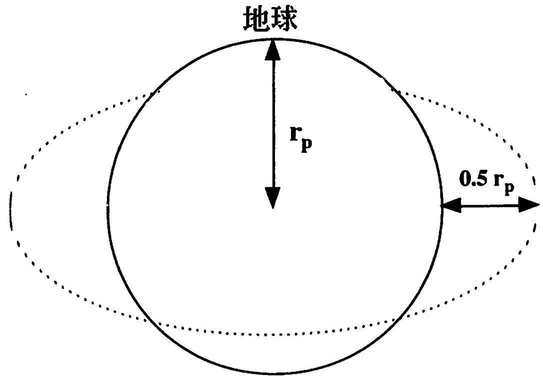
そのため高度が上がるにつれて時間は早くすすむようになる．ずっと高度が上がってはるか彼方では周回速度はほとんどゼロとなり，固有時はここで定義された座標時と同じものになる．そのときには重力がなくなった分だけ，つまり一年に百分の２秒ほど，地表より時間の進み方ははやくなる．では途中のどこか適当な高度で，時間ののびかたがちょうど地表面と同じになるはずである．つまり地球ジオイド面の標準時間と進み方が同期する衛星軌道の高さがどこかにあることが分かる．解の存在が分かっていれば，あとは方程式を解くだけである．

(8)に(10)を代入することによって容易にこの衛星のの固有時 τ_s と座標時との比を求めることが出来る．しかもそれは非常に単純なかたちにまとまって，

$$(d\tau_s/dt) = (1-3GM/rc^2)^{1/2} \quad \cdots\cdots (11)$$

となる．するとジオイド面上の物体と同じ固有時を持つ衛星の軌道高度は，という問題は(9)式＝(11)式，という方程式を r について解けばよい，ということになるが，これは解くというのもはばかられるほど簡単な方程式になる．(9)式と(11)式の右辺をそれぞれ自乗して等しいと置くと

$$1-2GM/r_Pc^2 = 1-3GM/rc^2 \quad \cdots\cdots (12)$$



第１図　地球周回時刻静止軌道

これから直ちに，求める軌道高度は

$$r = 3r_p/2 \qquad (13)$$

であることがわかる（第1図）．この結果は地球質量に依存しない，単純に極半径と軌道半径だけの関係式となっているので，時空の幾何学的な性質として次のような定理にまとめることが出来る．

天体表面と円軌道周回衛星の固有時に関する定理

球対称な質量分布をしている自転していない半径 r の天体があり，r と比べてシュバルツシルト半径 $2GM/r_pc^2$ が十分小さい場合，天体の表面からの軌道高度が天体半径の半分の円軌道を自由落下する物体の固有時は，天体の表面の固有時と等しくなる．

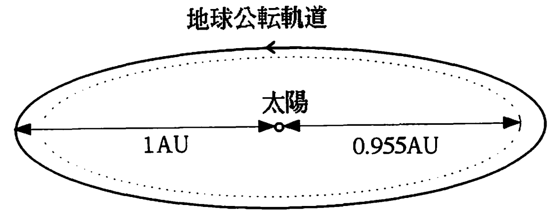
序で述べたように，地表からおよそ 36,000km 上空の静止軌道を周回する人工衛星はその周期が 24 時間となり，特に赤道の上を周回するものはわれわれから見ていつも空の同じ方向に止まって見える．

これに対し我々が計算によって求めた軌道に人工衛星を打ち上げたならば，その周期は約 2 時間半となり 1 日に 9 周以上も地球をめぐるが，そこでの時間の進み方は地表面とまったく同じになる．このことから我々はこの軌道を時刻静止軌道と名付けた．ちなみに空間の静止軌道をめぐる人工衛星は時間については 1 年に百分の 1.6 秒ほど地表より早く進むと計算される．

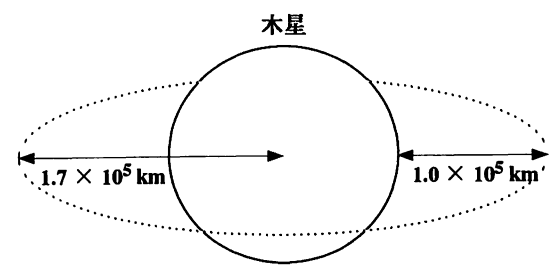
4. 他の天体を巡る解

時刻静止軌道は地球のまわりのみではなく，速度と重力による時間ののびが地表とつりあってさえいればどこをめぐっていてもよい．太陽系の天体をめぐる軌道で他にもこのようなものがないかと探してみた結果，まず太陽をめぐる人工惑星の軌道にひとつ，解を見つけることが出来た．

厳密には地球の公転軌道は楕円であり，TAI や TT と実質的に同等である地球中心力学時 TDT は，太陽系重心力学時 TDB とは公転速度の変化や太陽の重力ポテンシャルの影響分だけ進み方の違いが生じる．現在では定義により平均的な進み方の違いは生じないようにされているが，それでも地球が近日点にあるときと遠日点にあるときでは重力ポテンシャルの影響は異なるので，TDT は TDB に対して 1 年周期の周期的な変動が存在している．つまり太陽系全体にわたってより一様で，太陽系天体の運動方程式を考える際の基準となる TDB と比べると，地球を中心とする衛星軌道を考えるのに適した TDT（これは TAI と事実上同じ）は，地球が近日点付近にあるときにはゆっくりになり，地球が遠日点付近にあるときには早く進むような変動がある．また，地球中心座標系での固有時を考える際に，太陽に近いところと遠いところでは進み方に差が出るのではないかという



第2図　太陽周回時刻静止軌道



第3図　木星周回時刻静止軌道

疑問が出るかも知れないが，結論から言うとこれは等価原理により，この影響はかなりの精度でキャンセルされることが分かる[(6)]．

TDT に固有時が同期するような 1 年周期の固有時の変動がある軌道は地球と同じ楕円長半径をもつ軌道だけなので，我々は TDT そのものではなく，TDT と平均的な進み方が等しくなる TDB に時刻が同期する軌道を求めた．導出の過程は文献(2)に詳しいが，太陽の重力ポテンシャルを加える部分だけ，上記のものより計算は複雑になる．結果は

$$R = 0.955A.U. \qquad (14)$$

という公転半径 R の円軌道を回る，自己重力の無視できる人工惑星は TDB と同期した固有時を持つことがわかった（第2図）．

太陽系内では(14)より内側ではどのような軌道を考えても TDB よりゆっくりな固有時しか得られない．しかしその外側では十分なな質量の惑星があればその回りで TDB に等しい固有時の軌道は可能である．ひとつひとつ当たってみた結果，火星および土星より遠くの惑星では，解は惑星半径より大きなものはないが，木星を回る軌道には適当なものがあることがわかった．正確には，木星の軌道も楕円軌道であり，11 年周期で太陽に近づいたり遠ざかったりするため時間の進み方にの 11 年周期の変動が出ることになるが，ここではその平均的な進み方に対して同期する軌道を求めた．結果は木星上約10万 km の円軌道上では平均の固有時が TT と等しくなることがわかった．（第3図）

5. 周波数精度を保つために要求される軌道幅

ここで求めた軌道高度はみな，それより低ければ固有

第1表 太陽系内の様々な時刻静止軌道
許容幅は現在の時計精度（～10^{-13}）に対しての値

中心天体	軌道半径（km）	許容幅（km）
地 球	9536	1.5
太 陽	142868000	1000
木 星	170000	1.5

時の進み方が速まり，高ければ固有時はゆっくりになる，という性質を持っている．実用上は要求される周波数精度を考慮して，ある範囲の高度を保つことが必要となる．要求される周波数精度で許容される周波数範囲を Δf とすると，これと許容される高度範囲 Δr との関係は次のようになる．

$$\Delta f/f = |d(d\tau/dt)/dr|\Delta r \quad \cdots\cdots(15)$$

これから，許容される高度範囲は

$$\Delta r = (\Delta f/f)/|d(d\tau/dt)/dr| \quad \cdots\cdots(16)$$

となる．$\Delta f/f$ として10^{-13}を取ると地球周回時刻静止軌道に対しては(11)式を r で微分し，$r = r_p$ を代入することによって，

$$\Delta r = 1.5\text{km} \quad \cdots\cdots(17)$$

が得られる．他の二つの時刻静止軌道に対しても同様にして，太陽周回軌道では

$$\Delta r = 1000\text{km} \quad \cdots\cdots(18)$$

木星周回軌道では

$$\Delta r = 1.5\text{km} \quad \cdots\cdots(19)$$

という値が得られる(第1表)．

6. 議論とまとめ

これまでの計算は多くの点で単純化，理想化されたものであったが，実際にはここで考慮しなかった多くの要素を軌道計算に含める必要がある．実際の計算の一例として，TDBと同期した太陽周回時刻静止軌道について太陽系の諸惑星の影響まで考慮した数値計算を行ってみた．太陽周回時刻静止軌道を選んだ理由は，各天体を質点とみなせること，精密な天体暦が得られていることなどの計算の容易さと，軌道許容幅が大きく，軌道制御なしに長期間その幅内にとどまることが期待されるからである．

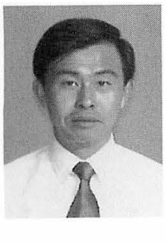
得られた結果としては，黄道面をまわる軌道では金星との会合で大きく軌道を外れてしまうこと，うまい軌道を選べば数百日は軌道制御なしに許容範囲にとどまることが可能であることなどが挙げられる．

他の軌道についてもこのような計算は可能なので，今後も折を見て，必要に応じて特に地球周回のTDTに同期した時刻静止軌道の計算などを行っていきたい．

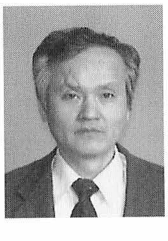
この時刻静止軌道というアイデアは現在のところ，通信や気象観測に活躍している位置の静止衛星のようには応用目的が見つかっていない．このため技術的には可能でも，実際に時刻静止衛星をこの軌道に打ち上げる予定は残念ながら今のところは無い．将来宇宙空間で非常に精密な時刻あわせを必要とするような応用技術が開発されれば，見直される日が来よう．

参 考 文 献

(1) クラーク，未来のプロフィル 早川書房 1978
(2) M. Hosokawa, F. Takahashi, "Time-Geostationary Orbits in the Solar System", Publ. Astron. Soc. Japan, 44, pp.159-162, 1992.
(3) 福島登志夫，"基礎座標系"，現代測地学，日本測地学会創立40周年記念，3章，pp.105-154, 1994.
(4) N. Ashby, D. W. Allan, "Practical implications of relativity for a global coordinate time scale", Radio Sci., 14, 4, pp.649-669, 1979.
(5) 細川瑞彦，1994年秋季通信総合研究所研究発表会予稿
(6) B. Hoffmann, "Noon-Midnight Red Shift", Phys. Rev., 121, 1, pp.337-342, 1961.



細川 瑞彦
Mizuhiko HOSOKAWA
標準計測部 周波数標準課
時空計測
E-mail: hosokawa@crl.go.jp



高橋 冨士信
Fujinobu TAKAHASHI
通信システム部
宇宙測地
E-mail: fuji@crl.go.jp

吉川　　真
Makoto YOSHIKAWA
宇宙科学研究所
天体力学