

2-3 時間・周波数標準における相対論効果

2-3 Relativistic Effects in Time and Frequency Standards

細川瑞彦

HOSOKAWA Mizuhiko

要旨

現在の高精度な時間・周波数標準計測においては、相対論効果は比較的容易に検出できるものであり、それゆえ様々な精密測定において相対論効果を考慮しておくことは必須となっている。本解説では相対論の概観と、二次ドップラー効果、重力赤方偏移、サニャック効果、シャピロ遅延、という最も頻繁に影響が現れる四つの効果について、直感的な解説を試みる。

Recent technology on the precise measurement of time and frequency makes it rather easy to detect the relativistic effects. It is, therefore, indispensable to take these effects into account when we conduct such precise measurement. In this article, we will show the outline of the relativity and try an intimate illustration on most popular four relativistic effects; second Doppler effect, gravitational red shift, Sagnac effect and Shapiro delay.

[キーワード]

相対論, 二次ドップラー効果, 重力赤方偏移, サニャック効果, シャピロ遅延

Relativity, Second doppler effect, gravitational red shift, Sagnac effect, Shapiro delay

1 序論 —時空とローレンツ変換—

時間一次元と空間三次元を合わせたものを時空と呼ぶ。相対論においては時間と空間は互いに独立に存在するものではなく、一体となった存在と考えるべきものである。現在、時間・周波数標準は 10^{15} の精度で発生、比較されているが、人工衛星の速度や地表付近での地球重力による相対論効果はその1万倍以上に及ぶ 10^{10} のオーダーで生じている。このようなニュートンの時空との食い違いは、様々な事例で測定され、検証され、現在の時間・空間・周波数標準の測定精度においては疑いのないものとなっており、時間と周波数を広い範囲で高精度に扱うとき、この事実を無視することはできない。

このように現在では、地球規模、あるいは宇宙技術において時間・周波数を精密に扱う際に、四次元時空の性質、すなわち相対論効果を取り入れることは欠かすことができない。時空基準座標系の一般論については2000年の季報で述べた[1]。実際に時間・周波数の精密計測を行う際

に必要となるのは、主として二次ドップラー効果、重力赤方偏移、サニャック効果、シャピロ遅延、という四つの効果である。ここではそれらの相対論効果について、最小限の前提で直感的な理解と具体的な取扱い方法が分かるよう、解説を試みる。

最初に基本的な変換則を確認しておく。互いに運動している時空座標系の間での座標変換は、時間と空間が入り交じった形で表される。特に、扱う座標系同士の相対速度が一定で、共に慣性座標系とみなせる座標系の時には、その変換はローレンツ変換としてよく知られたものになる。この変換の導出については文献[1]の付録で詳しく述べているので、ここでは相対論を扱う基礎として結果のみを与える。座標系同士の相対運動の大きさを v 、方向を x 軸にとると、

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで c は真空中の光速 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ であり、よく用いられる係数 γ は、以下のように定義される。

$$\gamma = 1 / [1 - (v^2/c^2)]^{1/2} \quad (2)$$

時空を二次元の紙の上で表す際には、空間軸のどれかを代表で選び、時間軸と組み合わせて表現する。ここでは x 軸を代表にとる。まず、ある時間軸 (t 軸) と空間軸 (x 軸) で表される座標系を時空上に設定し、次にこれらの軸とローレンツ変換で結ばれる座標系 t' 軸と x' 軸を描くと、両者の関係は図1のようになる。時間の基準となる時計が空間の原点に静止しているとき、この時計の時空の中での軌跡(世界線と呼ばれる)が時間軸となる、と理解できる。するとローレンツ変換で結ばれた座標系とは、元の座標系では等速度運動している時計を新たな時間軸にした座標系、と考えられる。このとき、光速不変という原理から、新たな空間軸 (x' 軸) は図1のように変換されることが理解できる。「いつ」「どこで」を表す時空の1点は、同じものであってもそれぞれの座標系で名前を変える。その名前の変え方の規則が、(1)式で与えられる変換則である。

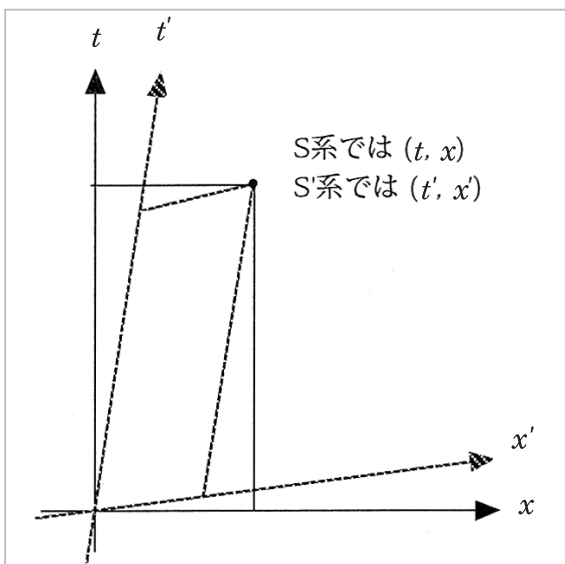


図1 時空と座標軸のローレンツ変換
時間の基準が一定速度で移動する(時空の中で傾きを持つ)ことにより、空間軸も傾いて変換される。時空の各点はそれぞれの座標系ごとに異なる座標値が与えられる。

2 不変量とミンコフスキー空間、二次ドップラー効果

一つの座標系において求められた量が、ある座標変換によっても変わらないとき、その量をその変換における不変量と呼ぶ。例えば通常のユークリッド空間において座標系の回転を考えると、二つの点を結ぶベクトルの成分はこの座標変換によって変わってしまうが、各成分の差の二乗和(長さの二乗)はピタゴラスの定理によって不変に保たれることが知られている。よって長さ(とその二乗)は、座標回転に対する不変量である。逆に、各成分の差の二乗和が不変量となるような座標変換を考えると、回転という変換が現れる。何が不変量となるかは、その空間の性質を規定する大変重要な情報である。

特殊相対性理論が成り立つ四次元時空は、以下に述べる独特な不変量を持つ、数学的にはミンコフスキー空間と呼ばれるものと考えられる。ある慣性座標系において時空の任意の二つの点 (t_1, x_1, y_1, z_1) 、 (t_2, x_2, y_2, z_2) を選ぶ。この2点はローレンツ変換により、他の座標系では (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) 、 (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) と表わされたとする。特殊相対性理論においては、時空の各座標の値自身や、各成分の差はローレンツ変換によって変化してしまう(例えば $t_2 - t_1 \neq t'_2 - t'_1$)。しかしながら、時空の各成分の差の二乗和は、ローレンツ変換によっては変わらないことが(1)式を用いて示される。

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \quad (3)$$

この式の右辺に(1)式を代入し、項を整理すると左辺が得られることは、経験がなければ一度確認してみるとよい。(3)式は任意の2点について成り立つ式であるが、話をある点 (t, x, y, z) とその近傍 $(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz)$ に関するところに限ると、任意の場所における微小線素ベクトル (dt, dx, dy, dz) に対する局所的な性質として

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (3')$$

と表すことができる。(3')式は、特殊相対性理論の範囲では(3)と同等の内容を局所的な形で表現しただけであるが、後に、一般相対性理論を考えるには形式としてより好都合なものであるこ

と分かる。

(3)式から、運動する物体の時間の伸びである二次ドップラー効果を計算することができることを示そう。ダッシュのつかない一般の座標系において運動する時計を考える。運動方向はどちらでも一般的な記述が可能だが、単純化のため x 軸が運動の方向になるように軸の方向を定め、運動の速度を v とする。微小時間 dt の間の移動量は vdt で表される。この間の時空内における運動のベクトルは $(dt, vdt, 0, 0)$ と表される。これに対し、この微小な時間の間時計の運動が止まって見えるような座標系、言い換えると時計と共に動く座標系、をダッシュのついた系として選ぶ。先の運動のベクトルはこの座標系では $(dt', 0, 0, 0)$ と表される。 dt' は運動している時計の刻む固有時である。

二つの座標系において、(3)式で表わされる量が不変であることから、

$$c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt'^2 \quad (4)$$

が得られる。これより運動する時計の読みと座標時との関係は

$$dt = dt' / (1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (5)$$

これは時計の速度が変化する場合には、速度が等速度運動とみなせるごく短時間だけに成り立つ関係であるが、一般の場合には dt' を固有時の経過 $d\tau$ として、変化する速度ごとに (5) 式の関係積分していくことにより、

$$t = \int d\tau / (1 - v(\tau)^2/c^2)^{1/2} \quad (6)$$

と表すことができる。これが特殊相対性理論において「二次ドップラー効果」と呼ばれているものである。

3 内積と計量テンソル

(3)式の各辺は、通常のユークリッド空間の「長さの二乗」という不変量とは符号だけが違っている。ユークリッド空間では「長さの二乗」は行ベクトルと列ベクトルを用いて

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (7)$$

というように表すことができるが、例えば(3)式の左辺はこれに似たような形で

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表すことができる。この左辺を ds^2 と表す。 ds は微小な線の要素、という意味で「線素」と呼ばれ、 ds^2 はその線素の、ミンコフスキー空間としての、長さの二乗、という意味である。(8)式と比較すると、(7)式も全く同じ形式で

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (7)$$

と表せることが分かる。なお、ここで出てきた正方行列はすべて対角行列であり、非対角成分は0である場合には記さずにブランクにしてある。詳しいことは数学の教科書に譲るが、行ベクトルと、それを転置した列ベクトルをそのまま掛けて内積となるのはユークリッド空間の時だけで、一般には空間の性質を表す行列がその間に入らなければならない。このような、ベクトルの内積の際に現れ、その空間の性質を表す行列は、計量テンソルと呼ばれる。ちなみに、テンソルというのはベクトルを一般化したもので、零階のテンソルがスカラー、1階のテンソルがベクトルであり、さらに必要に応じ、テンソルは幾らでも高階のものを考えることができる。計量テンソルは2階のテンソルであり、式の表現上は正方行列として表すことができる。さらに高次のものを扱うには各量に必要な数の添字をつけるという、より一般的な表現がある[2]-[4]が、ここでは扱うのは2階のテンソルまでとし、直感的に見やすい行列の表記を用いることにする。また一般には、計量テンソルはゼロでない非対角成分を持つが、ここではそのような例は扱わないで済む範囲に話を限ることにする。

ユークリッド空間の計量テンソルは陽に入れなくともよい、つまり単位行列で表されるのに対し、ミンコフスキー空間の計量テンソルは、時間部分と空間部分の符号が逆の行列として表

される。一般に、座標変換に対して不変な線素の長さの二乗 ds^2 は

$$ds^2 = (\text{線素の行ベクトル})(\text{計量テンソル})(\text{線素の列ベクトル}) \quad (9)$$

という形式に書き表せる。

一見、これらの表現は形式的なもので、それほど意味もないように思える。確かに計量テンソルの各成分が定数として表される場合は、(8)式のような表現を用いずとも(3)式のような表現で十分に思えるが、計量テンソルを用いることは、時空の性質の理解や計算を行う際に、見通しを得る上で様々な利点がある。さらに時空の曲がり、というものを考える一般相対論へと進む際に、計量テンソルは不可欠なものになる。全時空における計量テンソルが得られれば、それを用いて座標時や各座標成分と、固有時、固有長さなどとの関係が求まり、ある場所での時間・周波数の計測結果と別の場所での計測結果とを比較したり、広範囲において同期した座標時を構築したりすることなどが可能になる。

詳細を述べるのはかなり複雑な話になるので、結論となる式までは、定性的な理解のための記述に絞ろう。「計量テンソルの値が空間の各点ごとに異なる」ということが「空間が曲がっている」ということに対応する。通常の曲線に対する曲率との類推で考えてみるとよいが、曲がった空間の曲率とは、計量テンソルの位置に対する2階微分によって定義される。考える空間が平らである、というのはその空間の計量テンソルの各成分の2階微分が至る所ですべてゼロ、すなわち計量テンソルが全空間で定数として表せる、ということに相当する。さらに付け加えると、(8)式のように計量テンソルが表されたということは、時空が平らであり、その上ですべての空間座標軸が直交し一様等方であり、時間とともに回転することもない、慣性座標系がとられたことをも意味している。

重力とは四次元時空において時空が曲がっていることの現れである、ということを見抜き一般相対性理論を築いたのがアインシュタインであった[2]-[4]。ニュートンの発見した万有引力の法則では、重力場の中ではすべての物体が等しい加速度を受けるとされるが、これは逆にすべての物体にとって共通な時空自身が曲がってい

るためだ、というのが一般相対性理論をはじめとする曲がった時空の理論での解釈である。

一般相対性理論においてアインシュタインが発見した時空の曲がり方の法則は、定性的には

$$\text{時空の曲がり方} = \text{エネルギーと運動量の分布} \quad (10)$$

というように記述できる方程式であり、この方程式の方がニュートンの万有引力の法則よりも我々の世界の重力法則をより正確に記述できる、ということが、様々な実験、観測によってこれまでに実証されてきている[5]。(10)式の解として、すべての時空にわたる計量テンソルが得られれば、時間・周波数標準における一般相対論的な時空の取扱いはすべて事足りることになる。曲がった時空を記述する理論は一意ではなく、アインシュタインの一般相対性理論のほかにも例えばフランス・ディッケ理論[5]などが有名であるが、現在までの観測結果はすべて一般相対性理論を支持している。理論に現れる任意パラメーターを調整することなどにより、一般相対性理論とは異なりかつ観測結果に矛盾しない理論も作ることができるが、今のところは一般相対性理論を基礎におくことで時空の記述に困るような事象は見つかっていない[5]。そのためここでは、基礎理論として一般相対性理論のみを考えることにする。

4 アインシュタイン方程式の近似解

(10)式自身が、定量的に記述するのは大変複雑であり、その厳密解を得ることは非常に難しい。実際、幾つかの限られた条件でしか厳密解は得られていない。しかしながら、ブラックホール近傍のように極端に重力場が強いところでなければ、通常太陽系内で扱うには十分な精度の近似解が得られている。それは非回転座標系ではそれほど複雑ではない形で表される。

$$ds^2 = (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1+2\Phi/c^2 & & & \\ & -1+2\Phi/c^2 & & \\ & & -1+2\Phi/c^2 & \\ & & & -1+2\Phi/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで $\Phi < 0$ はニュートンの重力ポテンシャルであり、物質の分布によって、時空の各点で値が

変化する量である。採用した座標系が回転系か非回転系かは、力学的には、その座標系で静止しているものに遠心力など見掛けの力が働くかどうかで判断できる。地表に固定された座標系では、遠心力やコリオリの力が働くため、その座標系は回転系であることが分かる。(11)式の成り立つ非回転座標系ではこれとは逆に、地表は回転しているが天球面は回転しないように見える。

(11)の近似解は周波数に換算して、地球を中心として衛星軌道程度までを考えるとときには 10^{17} 程度、太陽系を考える場合には太陽のごく近くを除き 10^{15} 程度の精度までは成り立つと考えてよく、現在の標準の発生と計測の精度ではほとんど問題はない。近年の標準の向上と予想される高精度化に対応するために、更に精度を高めた計量テンソルの近似解についても最近議論が進んでいる[6]。

(11)式では、計量テンソルがミンコフスキー空間の場合と等しくなる基準点としてすべての質量から十分離れた無限遠方が選ばれている。地表面に固定された地球座標系では、我々は実用上、周波数標準の基準点として重力の等ポテンシャル面となるジオイド面を採用している。この場合には(11)式は書き直す必要があり、

$$ds^2 = (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1+2\Phi'/c^2 & & & \\ & -1+2\Phi'/c^2 & & \\ & & -1+2\Phi'/c^2 & \\ & & & -1+2\Phi'/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる。ここで Φ' はジオイド面を基準とした重力ポテンシャルであり、ジオイド面の重力ポテンシャル U を用いて、

$$\Phi' = \Phi - U \quad (12)$$

と表される。ここで注意すべきこととして、ジオイド面の重力ポテンシャル U を差し引くことで時間座標はスケール変更を受ける。このスケール変更がジオイド面上の固有時を基準とする地球時 TT と無限遠方の固有時を基準とする地心座標時 TCG の歩度の違いとなる。その値の1からのずれは、 $LG = 6.9693 \times 10^{-10}$ という値で表される。時系の定義と変換については、文献[1][4]を参照されたい。

5 重力赤方偏移

地球座標系においては、地表面近くでの Φ' は、地表での重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とジオイド面からの高さ h を用いて、

$$\Phi' = +gh \quad (13)$$

と近似的に表すこともできる。上記の重力加速度 g の値を用いると、計量テンソルの補正項 $2\Phi'/c^2$ は地表付近ではおよそ高度1mにつき 2.2×10^{-16} ずつ変化していくことが分かる。この座標系において地表面近くで静止している物体を考えよう。このとき、 $2\Phi'/c^2 \ll 1$ が成り立っている。また、時間が dt だけ経過しても、その位置は変わらないのだから、 $dx = dy = dz = 0$ である。この物体のこの間の固有時の経過は

$$d\tau = ds/c = (1 + 2\Phi'/c^2)^{1/2} dt \approx (1 + \Phi'/c^2) dt \quad (14)$$

と表される。ジオイドより高いところでは $\Phi' < 0$ となるので、高い所にある物体ほど、固有時の経過に対して座標時の経過が少なくなる、すなわち固有時が早く過ぎていくことが分かる。重力ポテンシャルが小さくなればなるほど、つまり(11)式の無限遠方を重力ポテンシャル零の基準点にした見方ではその絶対値が大きくなればなるほど、時間の進み方が遅くなる、という現象が起きることが示される。この現象を、重力赤方偏移と呼ぶ。(14)式と、 $2\Phi'/c^2 = 2.2 \times 10^{-16}/\text{m}$ という値から分かるように、地表近くでは高度が1m上がるごとに物体の固有時の周波数は、 1.1×10^{-16} ずつ高くなっていく。

物体が運動している場合には(5)式で表される二次ドップラー効果がこれに加わることになる。この効果は dx, dy, dz がゼロでないとして計算すれば容易に導くことができるが、このとき注意すべきは、空間成分の計量テンソルは計算の過程で c^2 で割られるため、1からずれた部分の寄与は $1/c^4$ のオーダーと極めて小さくなることである。 $1/c^2$ のオーダーまでの近似を行うと

$$d\tau = (1 + \Phi'/c^2 - v^2/2c^2) dt \quad (15)$$

が得られる。運動する物体の固有時は、この式によって一般相対性理論を取り入れた形で計算することができる。特に、楕円軌道をめぐる衛

星の場合はポテンシャルの小さい近地点近くのところで速度も速くなるので、近地点では固有時は二つの効果が強め合ってますますゆっくりになり、遠地点ではその逆となる。この二次ドップラー効果と重力赤方偏移の強め合いは、離心率効果と呼ばれる。(15)式は円軌道についてはより簡単に取り扱うことができ、ジオイド面上の原子時を基準に定義された地球時TTに対し、時刻静止軌道と呼ばれる軌道が考えられる[7][8]。

6 回転座標系とサニャック効果

先にも述べたように、地表面に固定された物体は、地球が自転しているために、非回転座標系からみると回転していることになる。しかし実際には、時間と周波数の標準を決める原子時計はそのほとんどが地表に固定されている。国際原子時に寄与する時計に限れば、今のところすべての時計がそうである。これらの同期を考えると、サニャック効果と呼ばれる、非常に混乱しやすい相対論効果を取り入れる必要がある。

座標系が回転しているかどうかは、その座標系で静止しているものに遠心力がかかるかどうかで区別できる。重力の効果を別にすれば、光が真空中を直進し、光速度が一定であるのは非回転座標系のみである。回転座標系では光の経路はその方向に応じてらせんを描く。このために生じる、回転座標系でのみ起こる効果がサニャック効果である。広い範囲での一般的な取扱いは、回転座標系での計量テンソルを用いるのが見通しがよいが、まずは分かりやすい特殊相対論のみを用いた局所的な議論をする。

地上の赤道のある1点を原点として、ある瞬間に二つの座標系を考えよう。一つは地球の自転に関係なく静止した座標系A、もう一つはその瞬間の原点の自転速度でその運動方向に等速度運動する座標系Bである。赤道における地球の自転速度は約450m/sである。定めた瞬間に原点に選んだ点は、A系ではこの自転速度で動いていってしまうが、B系では回転が無視できなく短い間だけ原点にとどまる。図2に示したように、またローレンツ変換(1)から示されるように、この二つの座標系では、原点を空間的に離れるほどに同一の時空点に対して時刻の値が異

なっていく。ではどちらの座標系が広範囲に地上の時間と空間を表わせるかという、地球は慣性座標系に対して自転しているのだから、これは明らかに座標系Aである。もしB系のような座標系を赤道上の多くの点に対して用意しこれを張り合わせるとすると、張り合わせる座標系ごとに時刻がずれてしまう(図3)。

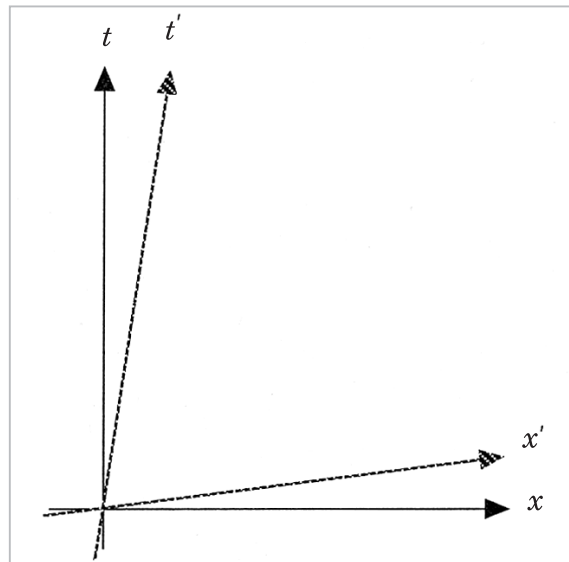


図2 慣性座標系と、自転についていく座標系

それぞれ座標系を一つだけ考える場合には、互いの時空原点が合うように座標軸を定めることはできる。

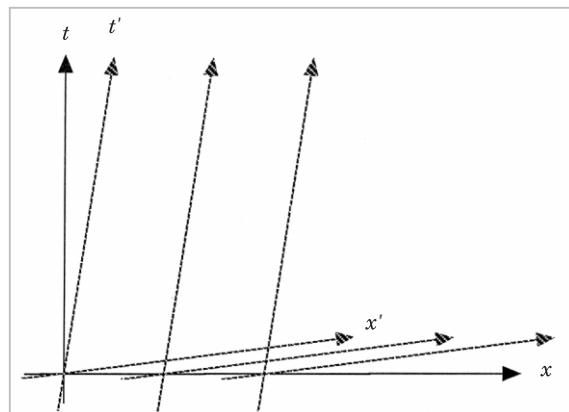


図3 自転についていく座標系の張り合わせ

自転についていく座標系を空間的に離れた場所ごとにいくつか考えてみる。回転しないもとの座標系に対し、原点の時刻を合わせていくようにすると、自転についていく座標系同士は時刻がずれてしまう。

これを無理に合うように時刻をずらして張り合わせていくと、一周したところで元とは大きく

ずれてしまうことが理解できる。このように、回転している座標系では、局所的には慣性系でありかつ広い範囲にわたって時刻が合う、というような座標の取り方はできないことが分かる。別の言葉でいうと、東回りの自転とは無関係に静止している慣性系では光速は一定なのだから、自転と共に動く回転座標系では、東回りの光の速さは光速より自転分遅くなり、西回りの光では逆に光速より速度が速くなるために生じる効果である。この効果は発見者の名にちなんでサニャック効果と呼ばれている。国際時刻比較からこの効果を検出したものとして文献[9]が有名である。これは地表面を基準とし、それに固定された機器によって標準を決定する上では大きな問題である。この問題の解決策としては、東回りと西回りの光の速さは異なる、というように光の伝搬速度を定義し直すか、あるいは東の方にある点は西の点に対し、比較結果より時刻が遅れている、という補正項をするかの二つが考えられる。

この二策のうち、実際に採用されているのは後者の方法であり、その補正項 Δt は東西方向の距離 x に対し、

$$\Delta t = \Omega_E R x / c^2 \quad (16)$$

と表される。ここで Ω_E は地球の回転角速度であり、 R は地球半径である。 x の距離を光が進むのにかかる時間は x/c 、この間に自転で地表が動く距離は $\Omega_E R x / c$ 、それだけの距離を光が追いつくのにかかる時間が Δt 、ということで(16)式は理解できる。計量テンソルを用いた、時刻比較における回転座標系のより一般的な取扱いは[10]に詳しい。回転座標系では計量テンソルは非対角成分が現れるので、取扱いはやや複雑になる。

7 シャピロ遅延

曲がった時空の理論においては、真空中の光の運動は、その運動を表す世界線の線素 ds が至る所で、(11)式などで求められる長さがゼロである、ということで規定される。これが、ある時空点とその近傍を、局所的にはミンコフスキー空間で近似でき、特殊相対性理論が成り立つような座標変換がある、ということの条件にな

る。このことは一方で、曲がった時空では常にもどこでも特殊相対論が成り立ち、光は必ず光速で運動する、とはならないことを意味する。一般相対性理論の近似解(11)式で、原点に質量 M の物体が存在する場合の x 軸上を伝わる光、という単純な例を見てみよう。このとき常に $y=z=0$ 、 $\Phi = -GM/x$ であるから、計量テンソルも 2×2 行列に単純化されて

$$ds^2 = (cdt, dx) \begin{pmatrix} 1 - 2GM/xc^2 & \\ & -1 - 2GM/xc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} \quad (17)$$

という表現が得られる。ここで G はニュートンの重力定数 $6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kgs}^2)$ であり、光の運動を求めるにはこれを展開し $ds^2=0$ と置くことで

$$(1 - 2GM/xc^2)c^2 dt^2 = (1 + 2GM/xc^2) dx^2 \quad (18)$$

が得られる。この式と、弱い重力場では $1 \gg 2GM/xc^2$ となることの近似により、この座標系での時空の (t, x) 点における光の速度 dx/dt は、いわゆる光速 c より小さく、

$$dx/dt = \pm(1 - 2GM/xc^2)c \quad (19)$$

となることが分かる。原点からの距離 x が小さく非常に重力場が強いときに光の速度がゼロになるのは、シュバルツシルト半径と呼ばれる $x = 2GM/c^2$ の地点であること、逆に x が大きい遠方の極限では通常の光速 c に戻ること、が見取れる。また、光が重力場の源泉である質量 M の物質へ向かうか、それとも離れていくかという方向にはよらないことにも注意されたい。

このように、広い範囲で一般相対論の解となっているような座標系では、重力場の強いところで光の速度が遅くなり、その結果重力場を伝わる光の伝搬時間が見掛け上、速度 c での伝搬から求められるものより遅れてしまう、ということが導かれる。このことを論文として、査読者のある一般論文誌に初めて投稿したのがI. Shapiroである[5][11]ことから、この効果はシャピロ遅延と呼ばれている。この論文では例として、惑星間の光、電波の伝搬が、一般相対論を用いた計算の場合、非一般相対論的な計算の結果より到着時間が遅れることを示した。それまで、一般相対性理論を実験的に検証するには、水星の近日点移動、重力レンズ効果、重力赤方偏移

の三つしか方法が提案されていなかったため、この論文のタイトルは「一般相対論の第4のテスト」という題になっている。この効果は実際に水星や金星へのレーダーエコー観測などで確認され、相対論の検証に重要な役割を果たした[5]。

伝搬時間の遅れは、上記のような重力源を通る軸上では(19)式を用いて簡単に計算することができる。 x 軸の正方向に x_1, x_2 の2点があるとき、

$$cdt = (1 + 2GM/xc^2)dx \quad (20)$$

を定積分することにより x_1 から x_2 までを速度 c で伝搬したときに対する実際の光の伝搬時間の遅延 Δt は

$$\Delta t = 2GM/c^3 \ln(x_2/x_1) \quad (21)$$

が得られる。より一般的な三次元内の伝搬では、実用上十分なポストガリレイ近似[4]で、伝搬の始点 x_1 、終点 x_2 と重力源の位置 P によって作られる三角形を考えると(図4)各辺の長さを用いて

$$\Delta t = 2GM/c \ln\left\{\frac{(|P_{x_1}| + |P_{x_2}| + |x_2 x_1|)}{(|P_{x_1}| + |P_{x_2}| - |x_2 x_1|)}\right\} \quad (22)$$

によって求めることができる。

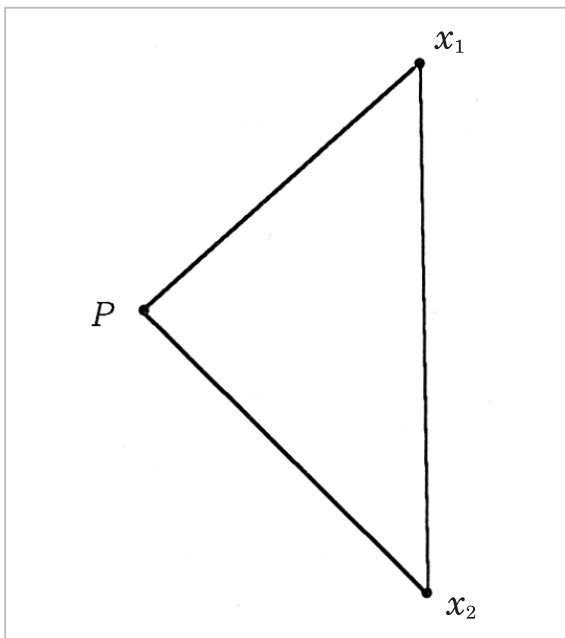


図4 シャピロ遅延 始点、終点、重力源の三角形

P にある物質の重力場によって、始点 x_1 から終点 x_2 へ伝わる電磁波の伝搬時間は長くなり、重力場が無い場合に比べて到着が遅くなる。

例として(21)式で x_1 を金星公転半径0.7天文単位、 x_2 を地球公転半径1天文単位、 M を太陽質量 $2 \times 10^{30} \text{kg}$ とすると、金星が内合で太陽、金星、地球が一直線に並んだときの金星—地球間の光伝搬におけるシャピロ遅延の量は、片道でおよそ3.5マイクロ秒、往復では7マイクロ秒ほどに達することが分かる。

なお、重力レンズ効果で光の経路が曲がることによる光路の伸びは、よほど曲がり角が大きくない限りはこのシャピロ遅延と比べてはるかに小さく、太陽による重力レンズ効果の曲がり角は、太陽の縁を光線がかすめるという、考えられる最大の場合でも2秒弱であることより、太陽系内では十分無視できる量である。

8 結論

ローレンツ変換を基礎として、不変量から計量テンソルを導入し、時間・周波数分野においてよく現れる四つの相対論効果、二次ドップラー、重力赤方偏移、サニャック効果、シャピロ遅延について概観してきた。相対論効果は、最初はどれも奇異に思えるが、時空の考え方が飲み込めると、案外直感的にとらえやすいものである。その意味で、この記事が時空の性質を理解する一助となれば幸いである。一度厳密な取扱いやより一般的な表現などはここでは記述しきれなかったところが多々ある。それらについては参考文献にあげた書籍などを見ていただきたい。機会があればより詳細に定量的な扱いや、今回省略した部分の記述にも取り組んでみたいと思っている。また最近、GPSにおいてこれらの相対論効果がどのような影響を及ぼしているかを解説した記事も書かれている[12]ので、良い参考となろう。

この解説が、相対論の考え方や上記四つの効果について、直感的な理解の参考になり、時間・周波数計測、時刻比較などの実際的な場合において、どのような効果がどれくらいの量の影響を引き起こすのかなどを評価する際に多少でも役立てていただければ幸いである。

参考文献

- 1 細川瑞彦, "時系と周波数標準特集号", 通信総合研究所季報 Vol.45, Nos.1/2, pp.3, 1999.
- 2 A.Einstein, S. B. Preuss. Akad. Wiss., pp.777-786, pp.799-801, 1915.
- 3 ランダウ=リフシッツ, "場の古典論", §6, 東京図書, 1978.
- 4 福島登志夫, "現代測地学", 3章, pp.105-154, 文献社, 1994.
- 5 C.M. Wil, "アインシュタインは正しかったか?", 松田卓也, 二間瀬敏史訳, TBS ブリタニカ, 1989.
- 6 IAU Colloquium 180 Resolutions, 30 March 2000. http://danof.obspm.fr/IAU_resolutions/Resol-UA1.htm
- 7 M.Hosokawa and F.Takahashi, Publ. Astron. Soc. Japan44, pp.159-162, 1992.
- 8 細川瑞彦, 高橋富士信, 吉川真, "時系と周波数標準特集号", 通信総合研究所季報 Vol.45, Nos. 1/2, pp.103, 1999.
- 9 Y.Saburi, M.Yamamoto, and K.Harada, IEEE Trans. Instrum. Meas., IM-25 No4, pp.473 - 477, 1976.
- 10 G.Petit and P.Wolf, Astron. Astrophys. 286, pp.971-977, 1994.
- 11 Shapiro, Phys. Rev. Lett. 13, pp.789, 1964.
- 12 N.Ashby, 細川瑞彦訳, パリティ 2003年6月号, pp.18, 丸善, 2003.

ほそかわ みずひこ
細川瑞彦電磁波計測部門原子周波数標準グループ
リーダー 理学博士
原子周波数標準、時空計測