

2 日本標準時の高度化

2 Japan Standard Time and its Related Research

2-1 時間周波数標準の計測と評価の基礎

2-1 Fundamentals of Time and Frequency

梶田雅稔 小山泰弘 細川瑞彦

KAJITA Masatoshi, KOYAMA Yasuhiro, and HOSOKAWA Mizuhiko

要旨

時間(周波数)は、基礎物理量でのひとつあり、またその中でもっとも高精度に測定することが可能である。実際に時間・周波数の測定を行う上での機器の原理や、その不確かさを見積もる上で必要な概念を概説する。

Time (frequency) is one of the fundamental physical quantities, that can be measured most accurately among them. In this paper, the principles for the measurement of the time & frequency and the estimations of its uncertainties are summarized.

[キーワード]

時間・周波数標準, SI 単位, 周波数測定, アラン分散

Time and frequency measurement, International system units, Frequency measurement, Allan variance

1 周波数の歴史と意義

ある周期現象が単位時間内に何回繰り返されるか、が周波数である。適切な自然現象を用いるとこの量は極めて正確に保つことができることが古来知られてきた。人間がまず認識してきたのは太陽、月、星など天体の運行の周期性とその正確さであろう。これを利用して時刻が定められ、暦が作られてきた。しかしこれらは非常にスケールの大きな運動であり、人間による制御の及ばないものである。人間が自ら作りだし、制御できるものとしては、1つには古来からの弦楽器や管楽器による音程の制御などが挙げられようが、本格的な技術としては、16世紀のガリレイの、振り子の等時性、すなわちその周期がおもりの重さによらず振り子の長さのみに依存した一定の値であることの発見に始まったと考えられる。17世紀にはホイヘンスが振り子時計と、さらにはひげゼンマイと

テンプによる機械振動の正確な周期性を利用した機械式時計を開発している。これらに加え、18世紀には音叉の発明により音響の周波数の基準が正確に得られるようになった。この後、周波数の精度向上は2つの大きな飛躍を迎えることになる。その第1は1880年のジャック・キュリーとピエール・キュリーによる、石英の結晶が持つ圧電効果の発見に始まる水晶発振器の開発であり、第2は1949年にアンモニア分子の反転準位間遷移の利用に始まる原子周波数標準器の開発である。原子周波数標準器では、開発当初から10桁という群を抜いた精度が得られていたが、約60年を経て、現在ではその正確さは16桁に達している。さらに21世紀初頭から非常に勢いで正確さが向上している光領域の原子周波数標準器は第3の飛躍と言えよう。周波数標準の歴史については、例えば文献[1]を参照されたい。

このように高精度の発振器により、極めて高精

度の周波数信号が現在は容易に得られるようになってきている。では、その精度は、どのように計測し、評価したら良いのであろうか。改めて考えると、周波数の基本要素は位相と振幅であり、実際の信号にはさらに雑音に乗っている。後で述べるように、良い周波数信号では振幅の変動はあまり問題にならないことが多いので、実際の評価には、時間の関数としての位相に対し、正確さ、安定度、雑音などを適切な尺度で計測し、評価することが必要になる。本稿では、高精度の周波数発振器などから得られる周波数信号について、その計測方法と、これらの尺度評価方法について解説する。2 では、周波数発振器の正確さの程度について概観し、周波数評価の基礎となる量の定義を行う。3 では周波数測定の方法と基礎について述べ、4 では、その評価法について解説する。5 では周波数信号に対するノイズの分類とスペクトル展開について解説し、6 でまとめを述べる。

2 時間・周波数の基準の正確さ

2.1 周波数標準器の正確さ(原子時計はなぜ正確か)

1 に示したような発振器の技術の発展とともに、時計が示す時間の正確さは向上した。17世紀に開発された振り子時計では、振り子の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (1)$$

で表される。ここで、 l は振り子の長さ、 g は重力加速度である。しかしこの周期も(ア)温度1Kの変化によって振り子の長さが 10^{-6} 程度の割合で変わること、(イ)重力加速度は地球上の位置、特に標高1mの変化によって 10^{-7} 程度の割合で変化することによって常に一定の周期であるとはいえない。温度によって時計の進み方が変わることは発振周波数が温度等に依存する水晶時計についてもいえる。ただ、水晶振動は振動周波数の周波数幅に対する割合(Q値と呼ばれる)が振り子時計よりも5-6桁高いので振り子時計よりも安定度は高いといえる。

原子時計が出現してすぐに、時計の正確さはそれまでの水晶時計に比べて3桁程度向上した。原子時計は、原子(中性、イオン)が吸収、放出する

電磁波の周波数を基準にした時計である。原子時計は本来「原子周波数標準器」と呼ばれるもので、水晶時計などと併用し、その誤差をフィードバックすることで初めて時計として機能する。原子時計がこれまでの時計と異なる点として以下のことがあげられる。

(i) 原子核の周りに分布する電子はとびとびのエネルギーしかとることができない。そのエネルギー状態は、電子と原子核の間のクーロン力のみによって決まっているもので一意である。原子は、各準位のエネルギー(E_i)の差に相当する周波数(ν)の電磁波を吸収、放出することが可能である($\nu = (E_i - E_k)/h$ ここで h はPlanck定数)。

(ii) 原子時計はそれまでの時計と異なり、単一の原子(気体の状態)を基準にしているため、その状態は一意である(固体では隣接する原子分子間の相互作用等が一意でない)。

ひとこと言うならば、原子時計はミクロの世界の現象をマクロの世界で用いるものだと表現できる。その結果、市販の原子時計でも12桁以上の正確さを出すことができる。これは1秒の誤差を出すのに数万年かかるということである。原子時計が出現して、運動や重力によって時間の進みが遅くなるという相対論的効果も実験的に示されるようになった。

しかし原子時計として、無限の精度ではない。上記の(i)で示したことは完全に正しいわけではなく、エネルギーと時間の不確定性原理(量子力学の基本原則)により、有限時間 τ に応じて $\Delta\nu = 1/2\pi\tau$ の幅を持つ。 τ は原子と電磁波の相互作用時間で限定される場合もあるし、位相が決まった量子状態の寿命(自然放出、衝突等によって限定される)によって決められる場合もある。また、電子軌道が外部の電場や磁場によって歪められ、遷移周波数のシフトを引き起こす(電場によるものはStarkシフト、磁場によるものはZeemanシフトと呼ばれる)。(ii)で示したことも万全ではなく、実際には気体状態の原子でも原子同士、または容器の壁との衝突があったりしてその瞬間の遷移周波数シフトが衝突シフトとして現れる。その他、自由に飛び回る原子の運動や重力による相対論的効果による周波数シフト(二次Dopplerシフト、重力シフト)もある。

レーザー冷却によって原子の温度を数 μ K程度

まで下げることができるようになると、原子の動きが遅くなったり、または1か所に静止させることが可能になったりしたために測定時間 τ を長くとれるようになった。また、二次 Doppler シフトが18桁以下に下がるなどして時計としての正確さは更に向上し、原子泉型セシウム原子時計では16桁の正確さで測定できるようになっている。

これまでの原子時計は1-50 GHzのマイクロ波の周波数を基準にしたものであり、16桁の正確さを得るためには、10日以上計測が必要であった。周波数シフト、不確かさが同じ程度である場合、高い周波数を基準にしたほうが測定時間の短縮に有利であることと、光領域の原子の量子遷移には、遷移線幅が狭く、高精度な周波数標準に公的なものが多い。また、レーザー技術の発展により、測定時間の短縮と相まって、更に高い確度で時間・周波数を決定する可能性が開けてきている。ところがマイクロ波領域の周波数標準の正確さを損なわずに、光領域の周波数測定を行うことには大きな困難があった。実際に光領域での周波数測定が盛んに行われるようになったのは、2000年頃、繰り返し周波数が一定なフェムト秒パルスレーザーの開発で光周波数の測定が可能になってからである。現在では、例えばAl⁺イオンの光領域遷移周波数の正確さは、セシウムによる定義の限界を超えており、不確かさの要素の積み重ねのみからでは、18桁まで到達している[2]。

2.2 周波数の定義

時計の精度が向上するにつれて、ある時間の長さを決める定義が必要になる。時間は長さ、質量、電流、熱力学温度、物質質量、光度とともに国際単位系(SI)で定められた基本量のひとつであり、基本単位は秒(s)である[3]。秒よりも長い時間単位を表すにはキロ秒(ks: 10³秒)などの単位が使われてもよいのであるが、実際には分(min: 60秒)、時間(hour: 3600秒)などの慣用的単位が使われていることが多い。秒より短い時間単位はSIで定められたようにミリ秒(ms: 10⁻³秒)やマイクロ秒(μ s: 10⁻⁶秒)などの単位が用いられている。

最初は「地球の自転の平均周期の1/86400を1秒とする」定義がされていた。この時点での短期的変動は10⁻⁸程度であった。

そのため1956年に国際度量衡委員会で「地球の公転周期の1/331556925.9747を1秒とする」定義に変わったことを受けて1958年に日本国内の計量法も改正されている[4]。この時の観測精度は10⁻⁹程度であった。

さて、1949年にアンモニア分子の反転遷移周波数を基準にした世界最初の原子時計が開発された。続いて1955年に最初のCs原子時計がNational Physical Laboratory(NPL)で開発された[5]。さらにNPLとU. S. National Observatory(USNO)の共同研究の末、磁場がゼロの状態でのCs超微細構造遷移周波数を日周時の秒単位で9 192 631 770 \pm 20 Hzと測定した[6]。その後1960年までに他の数か所の研究機関でもCs原子時計が開発されて原子時計の時間の標準としての有用性が認識されるようになった。1967年に国際度量衡総会で「セシウム113原子の基底状態の2つの超微細構造の間の遷移に対応する放射の周期の9192631770倍に等しい時間を1秒とする」という定義が採用され、国内の計量法も1972年に改正されている[7]。

しかし、2.1で書いたように、遷移周波数は電場や磁場、原子の運動でシフトする。そのため、定義されたセシウム原子の周波数は「電場、磁場、ともにゼロであり、また原子が地球のジオイド面の高さで静止している状態での周波数」である。その定義された周波数を他の時計との比較なしに提示できるように、すべての不確か要因を自ら評価できるように作られた原子時計が、一次周波数標準器と呼ばれるものである。現実にはセシウム原子を上記の理想的な状態において測定することは不可能であるため、一次周波数標準器では周波数シフトを起こす要因(電場、磁場の大きさ等)をモニターし、測定された周波数に含まれる周波数シフトを見積もって補正を加えることによって時間・周波数の定義値を提示する[8]-[10]。

3 計測の基礎

3.1 周波数測定原理

3では交流電気信号の周波数または周期の測定法を述べる。周波数と周期は互いに逆数であるので片方を測定すればもう一方をも知ることができる。

3.1.1 エレクトリックカウンタによる測定 [11][12]

(1) 周波数測定法

まず、交流入力信号を適当な大きさに減衰したり増幅したりした上で、パルス波形に整形される。一方、1、5、10 MHz などの高安定発振器で構成された出力周波数は、10 のべき乗で分周され、分周比選択スイッチで選択されて1、10、100 ns などのクロック信号となる。入力信号の周波数直接計数法とは、クロック信号で τ 秒の間ゲートを開き、その間に N 周期の入力信号が通過したときに

$$f = \frac{N}{\tau} \quad (2)$$

を τ 秒間の平均周波数と求める方法である。

(2) 周期測定法

入力信号の周期を測定し、その逆数として周波数を求める方法もある。入力信号の n_d 周期分の時間だけゲートを開いてその間の τ_u 間隔のクロックパルスを n 回計測したとすると

$$T = \frac{n\tau_u}{n_d} \quad (3)$$

が $n\tau_u$ 秒間の平均周期となる。

(3) 時間間隔測定法 (TIC)

時間間隔の測定は、2つの入力信号にゲートの開と閉操作を分担して行い、その間の時間をクロックパルスの回数として測定する。2信号の周波数をほとんど同じとしてそれぞれの信号波形を $\sin(2\pi\nu t + \phi_1)$ 、 $\sin(2\pi\nu t + \phi_2)$ とする。その2信号のゼロ交差の時間差 T_d を測定する場合を考えると

$$T_d = n\tau_u (\phi_2 - \phi_1) = \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2\pi\nu} \quad (4)$$

と測定できる。

(4) 測定誤差

もっとも大きな測定誤差要因はゲート時間を通過するパルスの数についての ± 1 カウントの誤差 (± 1 誤差) である。計数精度は計数値の逆数になる。その結果、低い周波数の測定には周期測定が周波数直接測定よりも有利であり、高い周波数に関しては周波数直接測定が有利である。そのため、最近のカウンタでは周波数直接測定と周期測定の誤差範囲が交差する周波数より低い周波数

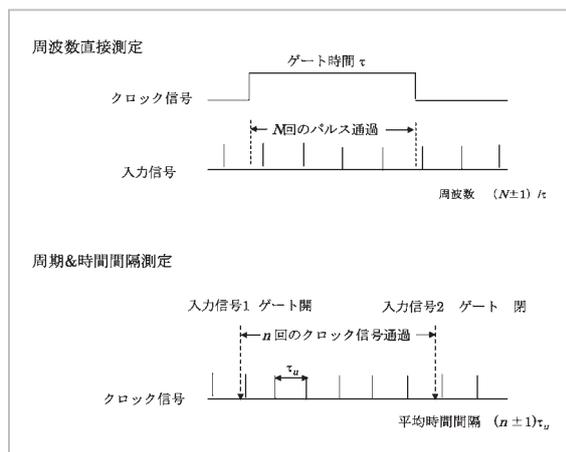


図1 エレクトリックカウンタによる周波数、周期、時刻差測定概念図

周期測定の場合は入力信号源 1、2 が同じである。

では周期を、高い周波数では周波数直接測定を行う方式を採用している。このような周波数カウンタをレシプロカルカウンタと呼んでいる。

パルス間隔以下の短い時間を測定して ± 1 誤差を小さくするために様々な考案がなされてきている。その代表的な例としては内部クロックで測定できない短い時間間隔を拡大して同じクロックで測定するタイム・エキスパンション方式、基準クロックと少し周波数が違う発振器を入力信号に同期させて発振器とクロック信号の関係を計算するタイム・バーニア方式、位相が少しずつずれた複数のクロックを用いて分解能を向上させる多相クロック方式、パルス間隔以下の短い時間間隔を電圧に変換してその電圧値から時間を測定する時間-電圧変換方式がある。このうち、タイム・エキスパンション方式やタイム・バーニア方式は測定休止時間が長くなる、多相クロック方式では回路規模が大きくなるという欠点があり、この中では時間-電圧変換方式が高速で高分解能を得るのに有利である。

誤差の原因は ± 1 誤差のほかに以下のようなものがある [13]。

(a) トリガ・エラー

入力電圧信号にノイズがあると

$$\text{トリガ・エラー} = [\text{信号ノイズ} / \text{トリガ電圧}] \times (\text{トリガパルス立ち上がり時間})$$

の形で時間誤差に変換される。信号ノイズがトリガ電圧に比べて小さく、また立ち上がり時

間が短いと、トリガ・エラーは小さくなる。

(b) タイムベース・エラー

クロック信号の基準となる周波数の揺らぎやドリフトによる誤差。クロック信号が内部水晶発振器を基準にしている場合が多いが、外部入力端子を通して原子時計を基準にすればタイムベース・エラーは抑制することができる。

(c) トリガ・レベル・タイミング・エラー

これは時間間隔測定の際に発生する測定誤差で、ゲートを開けると閉じるときのトリガの応答時間が異なる場合に生じる。

具体的な性能例としては、Tektronix 社が 2010 年 9 月に発表したモデルは時間分解能 50 ps で周波数分解能は 1 秒当たり 12 桁である [14]。

3.1.2 混合器による時間差測定法 (Dual Mixer Time Difference: DMTD) [15]

Dual Mixer Time Difference (DMTD) は周波数が ν でほぼ等しい 2 信号のゼロ交差時間間隔を通常の TIC よりも高精度に測定する装置である。 ν が低いほど ± 1 誤差が小さくなるのが式 (4) よりわかる。これはトリガ・エラー、タイムベース・エラー、トリガ・レベル・タイミング・エラーについても同じである。そのため両方の入力信号とバイアス発振器 $\sin(2\pi\nu_0 t)$ とのビート信号を $\sin[2\pi(\nu - \nu_0)t + \phi_1]$ 、 $\sin[2\pi(\nu - \nu_0)t + \phi_2]$ の形に変換した上で TIC に入力する。ここで、 $\phi_1 - \phi_2$ を一定に保つために移相器で調整されている。その原理を図 2 に示す。この装置で測定される時間間隔 T_{dmtd} は

$$T_{dmtd} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{(\nu - \nu_0)} = \frac{\nu}{(\nu - \nu_0)} T_d \quad (5)$$

である。 T_{dmtd} の誤差範囲は T_d を TIC で直接測定する場合と同じであるので、DMTD で決定される T_d の誤差精度は $\nu/(\nu - \nu_0)$ 倍だけ向上する。

3.1.3 周波数の雑音測定 [16] [17]

理想的な周波数発振器は、単一の正弦波で表されるはずであるが、現実の発振器は発振出力に変動を生じる。このうち、短期的な振幅変動は AM 雑音と呼ばれ、それ自体は周波数変動に結びつかないので通常さほど問題にされない。一方、位相の短期的変動は位相雑音と呼ばれ、直接周波数ゆらぎにつながるために周波数源の特性を決める重要な要素である。

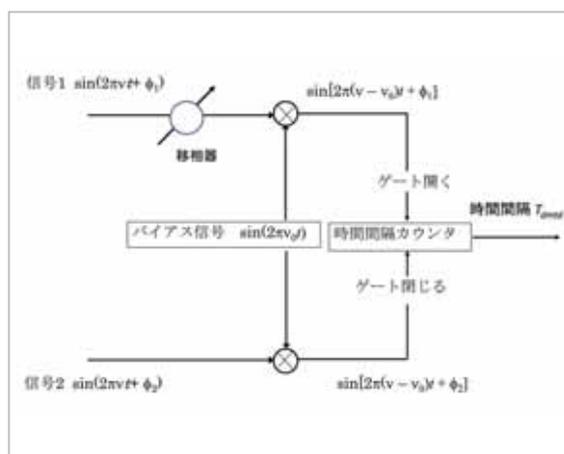


図 2 2 混合器による時間差測定法 (DMTD) のブロック図

発振器に含まれる位相雑音は、オシロスコープによる時間領域測定ではジッタとして現れる。一方、スペクトラムアナライザ (スペアナ) による周波数領域での測定では、発振器の本来の周波数 (キャリア) の近傍に裾が広がった形で観測される。これは、本来の出力周波数以外の近傍の周波数にも発振出力のエネルギーを撒き散らしていると見なすことができる。

位相雑音を評価する場合、キャリア周波数 f_0 から f_m だけずれたオフセット周波数成分のキャリアに対する強度比を以下のように dBc で評価することが原則である。

$$P(f_m) = -10 \text{Log}_{10} \left[\frac{I(f_0 + f_m)}{I(f_0)} \right] \quad (6)$$

しかし、実際にスペアナで位相雑音を評価する場合に観測される周波数成分は有限の帯域幅 Δf 内の電力であり、

$$E(f) = \int_{f-\Delta f}^{f+\Delta f} I(f') df' \quad (7)$$

で表される。キャリア周波数成分の線幅 Δf_0 が Δf よりも十分小さい場合、

$$\begin{aligned} E(f_0) &\approx I(f_0) \Delta f_0 \\ E(f_0 + f_m) &\approx I(f_0 + f_m) \Delta f \end{aligned} \quad (8)$$

であり、

$$L(f_m) = -10 \log_{10} \left[\frac{E(f_0 + f_m)}{E(f_0)} \right] \quad (9)$$

$$\approx -10 \log_{10} \left[\frac{I(f_0 + f_m)}{I(f_0)} \times \frac{\Delta f}{\Delta f_0} \right]$$

として観測される値は測定帯域幅によって変わるので帯域幅を明記しなければならない。そのため異なった帯域幅での測定を比較するにはこのままでは不便であるので帯域幅 1 Hz あたりの電力密度 $E(f_0 + f_m)/\Delta f$ を用いて位相雑音を評価することが一般的である。実際には

$$P(f_m) = -10 \log_{10} \left[\frac{E(f_0 + f_m)}{E(f_0)} \times \frac{1}{\Delta f} \right] \quad (10)$$

$$\approx -10 \log_{10} \left[\frac{I(f_0 + f_m)}{I(f_0)} \times \frac{1}{\Delta f_0} \right]$$

を dBc/Hz の単位で表したものをオフセット周波数と一緒に表示することが多い。

スペアナで位相雑音の測定を行う場合の欠点はスペアナ自身の位相雑音よりも低い位相雑音は測定できないこと、位相雑音と振幅雑音の区別がつかないことである。

Phase Lock Loop (PLL) 法は測定しようとする信号源に基準発振器を位相差 $\pi/2$ で位相ロックすることでキャリア信号を抑圧するので振幅雑音を除去した純粋な位相雑音を高いダイナミックレンジで測定することができる点がスペアナによる測定よりも優れている。測定器自身の位相雑音を低減するには2つの信号源の測定結果の相関をとればよい。ただ、PLL 法にも測定可能なオフセット周波数が限定されるという欠点もある。

3.2 周波数測定の不確かさ

3.2.1 測定サンプルの平均とばらつき

高精度の測定値を得たい場合、可能な限り繰り返し測定を行って得られた結果を平均操作することで精度を上げるべきである。この場合、平均値だけでなく測定値のばらつきも重要な要素である。

ここで平均とばらつきの概念を簡単な例を用いて示しておく。状態 A、B をとる二項分布における確率を p 、 $1-p$ とする。N 個のサンプルのうち、A の状態をとるサンプル数が n となる確率を $P(n)$ とすると n の平均値は

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N nP(n) \quad (11)$$

ここで

$$P(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (12)$$

を用いると

$$\bar{n} = Np \sum_{n=0}^N \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n} \quad (13)$$

$$= Np [p + (1-p)]^{N-1} = Np$$

が得られる。次にサンプルのばらつきのパラメータとしてよく用いられる標準偏差 σ は

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^N P(n) (n - \bar{n})^2 \quad (14)$$

$$= \sum_{n=0}^N P(n) [n(n-1) + n] - (Np)^2$$

$$= N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p)$$

そのため標準偏差の平均値に対する比率は

$$\frac{\sigma}{\bar{n}} = \sqrt{\frac{1-p}{Np}} \quad (15)$$

となり、サンプル数 N の平方根に反比例することがわかる。

繰り返し測定を行った結果からもっとも確からしい値を推定するのは最小二乗法がよく使われる。決定したいパラメータのセット λ があり、 j 番目の測定に対してもっとも確からしい値 X_j が λ の関数 $X_j(\lambda)$ で与えられる場合を考えた場合、

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [x_j - X_j(\lambda)]^2 \quad (16)$$

が最小になるようなパラメータ λ を求める。

3.2.2 時間・周波数の不確かさ

一般的に、測定値の真の値からのずれを起こす要因としては、平均はゼロであるが統計的なばらつきを起こすものと、何かの原因で真の値から系統的なずれを引き起こすものがある。測定値から真の値を見積もる際の不確かさは、統計的要因からくる不確かさ u_A (Type A) と系統的な不確かさ

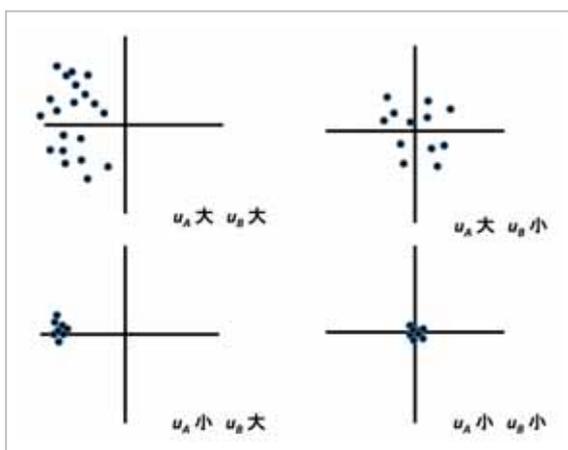


図3 統計的不確かさ u_A 、系統的な不確かさ u_B が大きい場合、小さい場合の測定値分布図

さ u_B (Type B) から次のように見積もられる。

$$u^2 = u_A^2 + u_B^2 \quad (17)$$

このうち、 u_A は測定値の揺らぎの平均値に対する割合で、揺らぎが標準偏差で見積もられるとすると式 (15) で示されるように測定データの数を増やせば小さくなる。 u_B を小さくするためには、測定値が真の値からずれる原因となる要素を探り、測定条件ごとに補正を加えることが必要になる。図3に u_A 、 u_B が大きい場合、小さい場合の測定値分布を示す。

実際に2台の原子時計で時間・周波数を比較した場合に u_A を見積もる上で大切な要素は2台の時計の時間・周波数の差のばらつきであり、その平均値が一致するかどうかは問題ではない。

一方、 u_B を決めるのは電場、磁場、相対論効果等に引き起こされる真の値からのずれを小さくできるか、あるいは正確に見積もって補正ができるかということである。 u_B では2台の時計のそれぞれの測定値の平均がどの程度一致しているかが真の値からのずれを見積もる上での目安になる。 u_B を最小に抑えるためには様々な条件で周波数測定を行い、シフト要因となるパラメータを最小二乗法で決定することが必要である。具体的には、Zeeman 効果の影響を決定するために磁場の大きさを変えて測定周波数の変化を測定してゼロ磁場での周波数を見積もることなどがあげられる。

4 周波数安定度の評価の基礎^[1]

ここでは、時間・周波数の統計的不確かさ u_A を見積もる上で必要になる周波数変動をどのようなパラメータで見積もることが異なる条件で測定された時計の特性を比較、議論する上で有用であるかを議論する。ここで議論される周波数変動は、時間とともにランダムに変動する周波数揺らぎを主に議論するが、時間とともに周波数が一方向に変化していく周波数ドリフトについても一部述べている。

周波数安定度を議論する際には、出力信号 $V(t)$ を以下のように表す。

$$V(t) = V_0 [1 + \varepsilon(t)] \sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \quad (18)$$

ここで、 V_0 、 ν_0 は出力信号の振幅、周波数の平均であり、 ε 、 ϕ は振幅変動、位相変動を表す。実際に得られる振幅は周波数変動を評価する上で十分変動が小さいと見なせることが多く、 V_0 は通常、定数として良い。瞬時位相 $\phi(t)$ を

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \phi(t) \quad (19)$$

とすると瞬時周波数 $\nu(t)$ は

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (20)$$

になる。ここで

$$|\varepsilon| \ll 1 \quad \frac{1}{2\pi\nu_0} \left| \frac{d\phi(t)}{dt} \right| \ll 1 \quad (21)$$

を仮定し、周波数変動を表す無次元パラメータ $y(t)$ を以下のように定義する。

$$y(t) = \frac{\nu(t)}{\nu_0} - 1 = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (22)$$

また、時間変動 $x(t)$ を次のように定義する

$$x(t) = \int y(t) dt = \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0} \quad (23)$$

2 で示したように、 $y(t)$ は実際にはその瞬時の値を測定できるものではなく、周波数カウンターのゲート時間 τ で平均化されたものが測定される。

$$\bar{y}_k(\tau) = \frac{x(t_k + \tau) - x(t_k)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt \quad (24)$$

周波数変動の大きさを見積もるには最初に周波数変動の分散

$$\langle \bar{y}_k(\tau)^2 \rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{y}_k(\tau)^2 \quad (25)$$

を求めることを考えることが自然であろう。

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}_k(\tau)^2 \rangle &= \left\langle \frac{[x(t_k + \tau) - x(t_k)]^2}{\tau^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau^2} \left[\langle x(t_k + \tau)^2 \rangle + \langle x(t_k)^2 \rangle - 2\langle x(t_k)x(t_k + \tau) \rangle \right] \end{aligned} \quad (26)$$

ここで位相や周波数の自己相関関数

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (27)$$

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)y(t + \tau) dt$$

を定義する。 $R_x(\tau)$ は s^2 単位であり、 $R_y(\tau)$ は無次元である。

$$R_y(0) = \langle y(t)^2 \rangle \quad (28)$$

であることは容易にわかる。自己相関関数とはある時間での位相や周波数の平均値からのずれが時間 τ だけ変化した後でどれだけその影響が残っているかを示すパラメータである。このパラメータを用いると式 (26) は以下のように変形できる。

$$\langle \bar{y}_k(\tau)^2 \rangle = \frac{2[R_x(0) - R_x(\tau)]}{\tau^2} \quad (29)$$

となる。後述するように位相の時間変動の速さは周波数成分で考えたほうが、わかりやすい。そのためには位相変動の自己相関関数をフーリエ変換したパワースペクトル密度 $S_{x,y}(f)$ を考える。

$$S_{x,y}(f) = 4 \int_0^\infty R_{x,y}(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \quad (30)$$

$$R_{x,y}(\tau) = \int_0^\infty S_{x,y}(f) \cos(2\pi f \tau) df$$

$S_x(f)$ は s^2/Hz 、 $S_y(f)$ は $1/\text{Hz}$ の単位である。

$\tau = 0$ の場合で考えると

$$\langle y(t)^2 \rangle = \int_0^\infty S_y(f) df \quad (31)$$

となり、パワースペクトル密度が周波数揺らぎの周波数成分を表していることがわかる。

パワースペクトル密度を用いると

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}_k(\tau)^2 \rangle &= \frac{2}{\tau^2} \int_0^\infty S_x(f) [1 - \cos(2\pi f \tau)] df \\ &= \frac{4}{\tau^2} \int_0^\infty S_x(f) \sin^2(\pi f \tau) df \end{aligned} \quad (32)$$

ここでさらに時間領域での時間微分が周波数領域では $2\pi f$ をかけることに相当するので

$$S_y(f) = (2\pi f)^2 S_x(f) \quad (33)$$

となることを考えると式 (32) は

$$\langle \bar{y}_k(\tau)^2 \rangle = \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (34)$$

と表される。実際には周波数変動のパワースペクトル密度は f の多項式

$$S_y(f) = \sum h_a f^a \quad (35)$$

で表される。これまでの測定データから $a = -2, -1, 0, 1, 2$ の範囲で論ぜられることが多い。ここでそれぞれの項は

- $a = -2$ ランダムウォーク FM 雑音
- -1 フリッカー FM 雑音
- 0 白色 FM 雑音
- 1 フリッカー PM 雑音
- 2 白色 PM 雑音

である。PM および FM の白色、フリッカー雑音については **4** で後述する。

さて、式 (31) を見ると、 $a = -2, -1$ では $f \rightarrow 0$ の領域でこの積分が発散してしまうことがわかる。実際には有限個の測定値から式 (22) のようにして周波数変動の残差を求めるので無限大になることはないが、得られる値がサンプルの取り方に依存してしまうので一般的な安定度尺度としては好ましくない。この積分値の発散は、動きの遅いランダムウォークやフリッカー FM 雑音によっては長

時間にわたってサンプリングを繰り返しているうちに周波数が際限なくずれていくことを表す。また周波数変動の残差を求める場合、基準となる平均周波数も全測定が終わらなければ得られないことも問題である。

そこで、有限の時間の中の周波数の変化をサンプリングするのが以下に定義される N 標本分散である。

$$\sigma_y^2(N, T, \tau) = \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(y_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \right)^2 \right\rangle \quad (36)$$

$$= \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2(N \pi f T)}{N^2 \sin^2(\pi f T)} \right\} df$$

ここで T は τ 秒測定の繰返し周期であり、 $t_{k+1} = t_k + T$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。各測定ごとに $T - \tau$ の空き時間があることになる。このうち、 $T = \tau$ 、 $N = 2$ の条件の N 標本分散を特別にアラン分散 σ_y^2 と呼んでいる。

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2} \left\langle (y_{k+1} - y_k)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle [x(t_k + 2\tau) - 2x(t_k + \tau) + x(t_k)]^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (37)$$

$$= 2 \int_0^\infty S_y(f) H(\pi f \tau) df$$

$$H(\pi f \tau) = \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2}$$

図 4 に $H(f)$ を示す。アラン分散では、 $a = -2, -1$ でも $f \rightarrow 0$ の領域での発散がないことがわかる。これは有限な測定時間 τ の間の周波数変動の測定結果であり、それを無限時間にわたってサンプリングしても問題はないことに対応する。

アラン分散の τ 依存性を以下のように議論する。

$$-3 < a < 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= 2h_a \int_0^\infty f^a \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \\ &= 2h_a (\pi \tau)^{-(a+1)} \int_0^\infty q^{a-2} \sin^4(q) dq \propto \tau^{-(a+1)} \\ q &= \pi f \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = -2 \quad \sigma_y^2(\tau) &= \frac{2\pi^2 h_{-2} \tau}{3} \\ a = -1 \quad \sigma_y^2(\tau) &= 2h_{-1} \ln 2 \end{aligned} \quad (38)$$

$$a = 0 \quad \sigma_y^2(\tau) = \frac{h_0}{2\tau}$$

この結果は、 $H(f)$ が $f_{max} = 3/(2\pi\tau)$ あたりで最大になり、また積分幅 Δf が $1/(\pi\tau)$ 程度であることから $f_{max} \times \Delta f$ が $\tau^{-(a+1)}$ に比例することから容易に理解できる。さらに表現を変えるならば周波数成分 f_{max} での揺らぎの量を τ に比例するサンプル数で割ることに相当する。 $a = 1, 2$ では上記の無限積分は無限大になってしまう。そこで最大周波数成分 f_h より高い周波数成分を遮断するローパスフィルターを使う場合で考える。その場合は式 (37) は有限積分

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= 2h_a \int_0^{f_h} f^a H(\pi f \tau) df \\ &= 2h_a (\pi \tau)^{-(a+1)} \int_0^{q_h} q^a H(q) dq \quad q_h = \pi f_h \tau \end{aligned} \quad (39)$$

に置き換えられなければならない。その結果、

$$\begin{aligned} a = 1 \\ \sigma_y^2(\tau) &= \frac{3h_1}{(2\pi\tau)^2} \ln(2\pi f_h \tau) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} a = 2 \\ \sigma_y^2(\tau) &= \frac{3h_2 f_h}{(2\pi\tau)^2} \end{aligned} \quad (41)$$

となり、 $a = 1$ (フリッカー PM 雑音) の場合も 2 (白色 PM 雑音) の場合も近似的に τ^{-2} の依存性を示すので 2 種類の雑音の区別がつかなくなる。この結果は、 $H(f)$ が $f = 3/(2\pi\tau) \times (2m+1)$ (m は整数) で表されるすべての周波数で極大になり (図 4 参照)、 $a = 2$ ではそのすべての周波数成分がアラン分散に均等に関与するためにアラン分散が周波数揺らぎの $3/(2\pi\tau)$ の周波数成分を表すという解釈が正しくなることに起因する。

$a = 1$ (フリッカー PM 雑音) の場合と 2 (白色 PM 雑音) の場合を区別できるように考え出されたのが修正アラン分散 $Mod \sigma_y^2(\tau)$ である。 $Mod \sigma_y^2(\tau)$ は τ を最小時間単位 τ_0 の整数倍

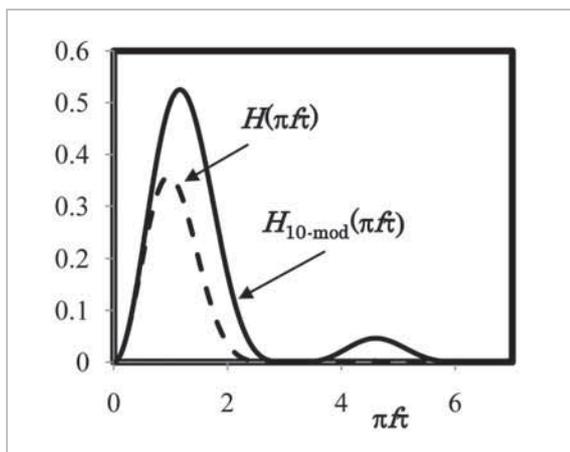


図4 H(πfτ)とH_{10-mod}(πfτ)のπfτの関数としての表示

$\tau = n\tau_0$ として以下のように定義される。

$$Mod\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{j+n} - \bar{y}_j) \right]^2 \right\rangle$$

$$\bar{y}_{j+n}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k+(j+n)\tau_0}^{t_k+(j+2n)\tau_0} y(t) dt \quad (42)$$

$$\bar{y}_j(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k+j\tau_0}^{t_k+(j+1)\tau_0} y(t) dt$$

式(42)を計算すると [18]

$$Mod\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) H_{n-mod}(f) df$$

$$H_{n-mod}(f) = H(f) M_n(f) \quad (43)$$

$$M_n(f) = \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \frac{(\pi f \tau / n)^2}{\sin^2(\pi f \tau / n)^2}$$

これを見ると、 $M(f)$ は $(\pi f \tau) < 1$ の範囲ではほぼ1に等しいが、 $(\pi f \tau)$ が大きくなるにつれて減衰することがわかる。図4に $H(f)_{10-mod}$ ($n=10$ で考えた $H(f)_{n-mod}$) を示して $H(f)$ と比較している。 $a < 1$ では式(43)の積分に寄与するのは $(\pi f \tau) < 1$ の範囲に限定されるので $Mod\sigma_y^2(\tau)$ は $\sigma_y^2(\tau)$ とほぼ同じである。しかし、 $(\pi f \tau) \gg 1$ の部分が大きく寄与する場合は大きな差が生じ、 $a=2$ の場合は $Mod\sigma_y^2(\tau) / \sigma_y^2(\tau)$ は n に反比例する。 $Mod\sigma_y^2(\tau)$ は τ_0 / τ^3 に比例することになり、 $a=1$ の場合とは大きく異なる τ 依存性を示す。これはアラン分散ではすべての $f=3/(2\pi\tau)$

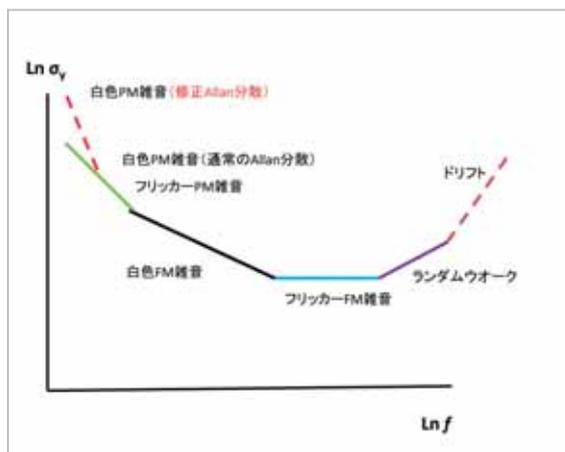


図5 アラン分散、修正アラン分散の測定時間 τ への依存性

$\times (2m+1)$ 周波数成分が均等に寄与していたところが、修正アラン分散では $f=3/(2\pi\tau)$ 周波数成分のみが寄与しているために $a=2$ の場合でも $a < 1$ の場合と同じように $\tau^{-(a+1)}$ に比例する形になると解釈できる。

図5に、アラン分散や修正アラン分散の τ 依存性を示す。

これまで考えてきた種類の周波数揺らぎのほか、周波数ドリフトも存在する。周波数ドリフトはアラン分散、修正アラン分散ともに τ^2 に比例した特性になる。普通は測定されたドリフトとランダム雑音を分離して考えるが、それが取り除かれないとそれは見かけ上 f^{-3} FM 雑音に相当する。この雑音に対しては式(37)(43)で求められるアラン分散、修正アラン分散とも発散してしまう。

周波数揺らぎも、必ずしも f^a で表される形になるとは限らない。一例としては、位相が正弦波で変調される場合がある。

$$\phi = \phi_m \sin(2\pi f_m t) \quad (44)$$

この場合、

$$y(t) = (f_m / \nu_0) \phi_m \cos(2\pi f_m t) \quad (45)$$

$$S_y(f) = (1/2)(f_m / \nu_0)^2 \phi_m^2 \delta(f - f_m) \quad (46)$$

から

$$\sigma_y^2(\tau) = \left(\frac{f_m}{\nu_0}\right)^2 \phi_m^2 \frac{\sin^4(\pi f_m \tau)}{(\pi f_m \tau)^2} \quad (47)$$

これは $\tau \ll 1/(2f_m)$ では

$$\sigma_y^2(\tau) \approx \left(\frac{f_m}{\nu_0}\right)^2 \phi_m^2 (\pi f_m \tau)^2 \quad (48)$$

となり、この範囲では周波数ドリフトと区別できない。しかし $\tau = 1/2f_m$ 付近でアラン分散は最大になり、 τ がそれよりも大きくなるとアラン分散は小さくなる。これは修正アラン分散でも同じである。

実際に時間、周波数の安定性を測定するには、2つ以上の周波数を比較してその周波数差を測定することが必要である。周波数 A、B の周波数差の分散 σ_{AB} はそれぞれの周波数 A、B の分散 σ_A 、 σ_B から

$$\sigma_{AB}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 \quad (49)$$

で求められる。 $\sigma_A \gg \sigma_B$ の場合には測定された σ_{AB} を σ_A とみなして差支えない。しかし、それぞれの周波数の安定度が同程度の場合 (特に最高レベルの安定度を測定する場合) には、3つの周波数を用いて

$$\sigma_A^2 = \frac{\sigma_{AB}^2 + \sigma_{AC}^2 - \sigma_{BC}^2}{2} \quad (50)$$

の形で各周波数の安定度を見積もる必要がある。

5 発振周波数変動のスペクトル^[11]

ここでは、周波数安定度の上限を決定する雑音の周波数源特性への依存性を議論する。

FM 雑音は発振ループ内、PM 雑音はループ外の雑音によって生じる。それは発振ループ外ではフィードバックがかからないので位相変化はそのまま位相変化として観測されるが、ループ内で位相変化が起きた時にそれを打ち消すように周波数変化として観測されることに対応する。ループ内の位相変化が高速であるほど、それに反映される発振周波数変化は小さくなるので PM 雑音と FM 雑音の f に対する依存性が異なる。位相雑音 $\Delta\theta$ の最大幅が 2π で、周波数変化の最大が発振

振器のスペクトル幅 $\Delta\nu$ であるとする、周波数ゆらぎ ($y = \delta\nu/\nu_0$) と、位相変化 ($x = \Delta\theta/\nu_0$) の関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} &= \frac{\Delta\theta}{2\pi} \\ y &= \frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\theta}{2\pi Q} = \frac{x\nu_0}{2\pi Q} \quad Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} \end{aligned} \quad (51)$$

で見積もられる。その結果、

$$S_y(f) = \left(\frac{\nu_0}{2\pi Q}\right)^2 S_x(f) \quad (52)$$

となる。一方、ループ外の位相雑音 (PM 雑音) は

$$\begin{aligned} \delta\nu &= (2\pi f)\Delta\theta \quad y = (2\pi f)x \\ S_y(f) &= (2\pi f)^2 S_x(f) \end{aligned} \quad (53)$$

となる。

さて、位相雑音は白色雑音 (f に対する依存性を持たない) と呼ばれるものとフリッカー雑音 (f^{-1} に比例) と呼ばれるものがあることは 4 で示した通りである。白色雑音は、 ν_0 がマイクロ波領域ならば熱雑音、光領域ならば量子雑音 (光子数の揺らぎ) である。 ν_0 の領域によるこの差は、1 光子エネルギー ($h\nu_0$) が $k_B T_0$ (T_0 は共振器の絶対温度) に比べて大きい小さいかによって光エネルギーの不連続性が揺らぎに与える影響が異なってくることによる。フリッカー雑音は回路素子などの非直線性で位相変調されて生じる。ループ内、外の位相変調のパワースペクトル密度を

$$S_{x-in}(f) = \alpha_{in} f^{-1} + \beta_{in}$$

$$S_{x-out}(f) = \alpha_{out} f^{-1} + \beta_{out}$$

と表すと

$$\begin{aligned} S_y(f) &= h_{-1} f^{-1} + h_0 f^0 + h_1 f^1 + h_2 f^2 \\ h_{-1} &= \left(\frac{\nu_0}{2\pi Q}\right)^2 \alpha_{in} \quad h_0 = \left(\frac{\nu_0}{2\pi Q}\right)^2 \beta_{in} \end{aligned} \quad (54)$$

$$h_1 = 4\pi^2 \alpha_{out} \quad h_2 = 4\pi^2 \beta_{out}$$

となる。さらにランダムウォーク雑音 ($\propto f^{-2}$) や線形の周波数ドリフトによる見かけの雑音 ($\propto f^{-3}$) を

考えると

$$S_y(f) = h_{-3}f^{-3} + h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0f^0 + h_1f^1 + h_2f^2 \quad (55)$$

の形で表される。

アラン分散の測定時間 τ への依存性は図 5 で示されている。 τ が短い領域では、 τ を長くとるにつれてアラン分散は減少する。Cs 原子時計等の場合は白色 FM 雑音が支配的な場合が多く、このような場合アラン分散は Q -値を高くすることで低く抑えられる。水素メーザーなどの場合は (ν_0/Q) が低いために白色 FM 雑音よりも PM 雑音が支配的になる場合が多い。 τ を一定以上長くするとフリッカー FM 雑音 ($\propto f^{-1}$) が顕著になり、アラン分散は τ に対して一定になるため周波数安定度に限界を与える。式 (54) で示されるように、フリッカー FM 雑音によるアラン分散の限界値も発振器の Q -値が高くなると小さくなる。 Q -値が高くなると、白色 FM 雑音が支配的な領域でもアラン分散を小さくすることができる。

測定時間 τ をさらに長くすると、アラン分散は逆に大きくなる。これはランダムウォークによる場合と周波数ドリフトによる場合がある。

アラン分散の τ に対する依存性は必ずしも上記のような単純な形になるとは限らない。たとえば位相が正弦波的に変調される場合には式 (47) で示すように τ が短い領域ではアラン分散は τ に関して増加関数になり、長い領域では減少関数になる。

6 まとめ

時間・周波数をもっとも高精度に測定可能な基礎物理量であり、現代の科学技術の発展に重要な役割を果たしている。その測定と評価については、時間の経過や、平均化時間と密接な関係があり、他の量のような平均と標準偏差だけでは評価しきれない部分がある。アラン分散という安定度の尺度がその典型であるが、それが通常の標準偏差とどう違い、パワースペクトル密度やノイズのタイプとどう関連するかを理解することは周波数の計測と評価において重要な基礎となる。その理解のための、時間・周波数に関連する測定技術の概論や、その不確かさを見積もる上で重要な概念を概説した。周波数の計測と評価を行う方々の参考になれば幸いである。

参考文献

- 1 細川瑞彦, 大学の物理教育, Vol. 14, No. 3, p. 125.
- 2 C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. Koelmeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband, Phys. Rev. Lett., Vol. 104, pp. 070802 (1-4), 2010.
- 3 http://www-lab.ee.uec.ac.jp/text/misc/si_units.html
- 4 http://www.shugiin.go.jp/index.nsf/html/index_houritsu.htm
昭和 33 年 4 月 15 日公布法律 61 号「計量法の一部を改正する法律」第三条 3 号改定.
- 5 L. Essen and J. V. L. Parry, Nature, Vol. 176, pp. 280–282, 1955.
- 6 W. Markovitz, R. G. Hall, L. Essen, and J. V. L. Parry, Phys. Rev. Lett., Vol. 1, pp. 105–107, 1958.
- 7 http://www.shugiin.go.jp/index.nsf/html/index_houritsu.htm
昭和 47 年 5 月 9 日公布法律 27 号「計量法の一部を改正する法律」第三条 3 号改定.
- 8 熊谷基弘, 伊東宏之, 梶田雅稔, 細川瑞彦, “原子泉型一次周波数標準器 NICT-CsF1,” 情報通信研究機構季報, 本特集号, 2-3, 2010.
- 9 松原健祐, 李瑛, 長野重夫, 小嶋玲子, 梶田雅稔, 伊東宏之, 早坂和弘, 細川瑞彦, “カルシウムイオン光周波数標準,” 情報通信研究機構季報, 本特集号, 3-2, 2010.
- 10 山口敦史, 志賀信泰, 長野重夫, 石島博, 小山泰弘, 細川瑞彦, 井戸哲也, “ストロンチウム光格子時計,” 情報通信研究機構季報, 本特集号, 3-3, 2010.
- 11 吉村和幸, 古賀保喜, 大浦宣徳, “周波数と時間—原子時計の基礎・原子時の仕組み”, 電子情報通信学会, 1989.

- 12 <http://www.yokogawa.co.jp/tm/TI/keimame/torjikan/kouzou.htm>
- 13 <http://www.yokogawa.co.jp/tm/TI/keimame/torjikan/kakudo.htm>
- 14 <http://ednjapan.cancom-j.com/news/2010/9/7224>
- 15 F. Nakagawa, M. Imae, Y. Hanado, and M. Aida, IEEE Trans. Inst. Meas. Vol. 54, pp. 829–832, 2005.
- 16 <http://em-field.jp/reduce-pn/l.html>
- 17 <http://gate.ruru.ne.jp/rfdn/TechNote/SpaCN.asp>
- 18 J. Vanier and C. Audoin, "The Quantum Physics of Atomic Frequency Standard," p. 251, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia.



かじ た まさとし
梶田雅稔

新世代ネットワーク研究センター
光・時空標準グループ主任研究員
博士(理学)
原子分子物理学、周波数標準



こ やま やすひろ
小山泰弘

新世代ネットワーク研究センター
光・時空標準グループグループリーダー 博士(学術)
宇宙測地、電波科学



ほそかわ みずひこ
細川瑞彦

新世代ネットワーク研究センター
研究センター長 博士(理学)
原子周波数標準、時空計測