

UDC 621.317.36/621.396.91

周波数標準器の短期安定度の測定

吉 村 和 幸* 原 田 喜久男* 小 林 正 紀*
(昭和 45. 9. 25 受理)MEASUREMENT OF SHORT-TERM FREQUENCY STABILITY OF
FREQUENCY STANDARDS

By

Kazuyuki YOSHIMURA, Kikuo HARADA and Masaki KOBAYASHI

The measurement of short-term frequency stability was made of precise quartz crystal oscillators, Rb atomic frequency standards and a hydrogen atomic standard in different measuring methods, and estimation and examination were made of the measuring system as well as the standards.

The basic theory of frequency stability almost established of late was also introduced to help the readers understand it. As the theory of frequency stability was applied mostly to signals soiled by random noises having continuous spectra, the authors analyzed the frequency stability of signals frequency-(phase-)modulated by discrete noises having discrete spectra, as the output from frequency synthesizers, and indicated that it was quite different from that of the former signals.

1. 緒 言

広帯域伝送, PCM 伝送などの通信技術の進歩, 船舶, 航空機の航行システムによる位置ぎめの高精度化および衛星観測のための世界的規模における時刻同期の必要などから, 時間と周波数の精度の要求は年々高くなっている⁽¹⁾。そして, 周波数標準器についても近年特に原子標準器を中心に著しい進歩をとげた。我国においても, 水晶発振器は引続いて性能が改善され, 当研究所における水素メーザ(一次標準器)の開発と精度の向上は国際的にも評価されている。さらに最近は実用器として Rb 原子標準器の開発に民間を含め力を注いでいる。

周波数安定度は“連続運転されている発振器がある期間にわたって同一の周波数値を実現しうる度合を表わ

す”量であり⁽²⁾, 周波数標準器の性能を簡便かつ正確に表現する重要な用語である。そして, 短期安定度は平均測定時間が10秒前後以下の安定度を意味するが, スペクトルのうえではキャリアから 0.1 Hz 程度以上離れた雑音成分が関係する。この周波数安定度の理論に関しても, 周波数標準器の性能向上と歩調を合わせて深く研究され, 今日ではほぼ確立されるに至っている⁽³⁾⁽⁴⁾。

今回は, Hメーザ(同期出力), Rb 原子標準器, 水晶発振器など比較的最近の標準器について異なる測定方法で短期安定度を測定した。そして, 標準器間の性能の比較に加えて測定系についても問題点を検討し, 短期安定度測定系の確立に必要な資料を得た。さらに理解を容易にするために周波数安定度の基礎理論にふれるとともに, これまでの周波数安定度の理論の多くが連続スペクトルをもつ雑音についてであるので, これを周波数合成の場合に伴う離散的な周波数スペクトルをもつ雑音の場合について発展させた理論についても述べた。

* 周波数標準部原子標準研究室

2. 周波数安定度の基礎理論⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾

発振器からの出力電圧は次のように表わせる。

$$V(t)=[V_0+\varepsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t+\varphi(t)] \quad (1)$$

$$\text{ただし, } |\varepsilon(t)/V_0| \ll 1, \quad |\dot{\varphi}(t)/2\pi\nu_0| \ll 1 \quad (2)$$

ここで, V_0 , ν_0 は公称の電圧振幅および周波数である。振幅変動量 $\varepsilon(t)$ は周波数変動には直接関係しない。

瞬時周波数 $\nu(t)$ は次のように定義される。

$$\nu(t)=\nu_0+\dot{\varphi}(t)/2\pi \quad (3)$$

したがって, $\dot{\varphi}(t)/2\pi$ は周波数の瞬時的な不安定さを表わしている。便宜上これを ν_0 で規格化した量を考える。

$$y(t)=\dot{\varphi}(t)/2\pi\nu_0 \quad (4)$$

$y(t)$ の τ 時間平均は周波数安定度の定義に直接関係する。

$$\bar{y}_k=\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t)dt=\frac{\varphi(t_k+\tau)-\varphi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \quad (5)$$

ここで, $t_{k+1}=t_k+T$, $K=0, 1, 2, \dots$, T は τ 時間測定の繰り返し周期である。

(5)式の測定を N 回行なって求めた分散を $\sigma_y^2(N, T, \tau)$ と表わすと,

$$\langle\sigma_y^2(N, T, \tau)\rangle=\left\langle\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^N\left(\bar{y}_n-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\bar{y}_k\right)^2\right\rangle \quad (6)$$

ここで, $\langle \rangle$ は無限時間平均を表わしている。

(1)式の $\varphi(t)$ の自己相関々数を $R_\varphi(\tau)$ とすると,

$$R_\varphi(\tau)=\langle\varphi(t)\varphi(t+\tau)\rangle \quad (7)$$

(5), (7)式から $N \rightarrow \infty$, $T=\tau$ の場合の分散は次のように表わすことができる。

$$\sigma_y^2(\infty, \tau)=2[R_\varphi(0)-R_\varphi(\tau)]/(2\pi\nu_0\tau)^2 \quad (8)$$

ここで, $\sigma_y^2(\infty, \tau)=\langle\sigma_y^2(\infty, T, \tau)\rangle$ である。短期安定度にも最も影響する白い位相雑音や白い周波数雑音の場合, $N, T/\tau(=r)$ にあまり影響されないので(8)式でじゅうぶんである。

パワースペクトル密度を用いると(6), (8)式の計算に便利である。 $y(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\varphi(t)$ のパワースペクトル密度をそれぞれ $S_y(f)$, $S_{\dot{\varphi}}(f)$, $S_\varphi(f)$ と表わすと, これらの間に次の関係がある。

$$S_y(f)=(1/2\pi\nu_0)^2 S_{\dot{\varphi}}(f)$$

$$=(f/\nu_0)^2 S_\varphi(f) \quad (9)$$

ここで, f はフーリエ周波数である。パワースペクトル密度と自己相関々数はフーリエ変換で結ばれる。たとえば,

$$S_\varphi(f)=4\int_0^\infty R_\varphi(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$R_\varphi(\tau)=\int_0^\infty S_\varphi(f)\cos 2\pi f\tau df \quad (10)$$

以上の式を用いて(6)式を書きなをすと,

$$\langle\sigma_y^2(N, T, \tau)\rangle=\frac{N}{N-1}\int_0^\infty df S_y(f)\frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2}\left\{1-\frac{\sin^2(\pi Nrf\tau)}{N^2\sin^2(\pi rf\tau)}\right\} \quad (11)$$

結局, (1)式の信号の周波数安定度は(11)式の平方根で与えられる。(11)式は周波数領域($S_y(f)$)から時間領域への変換の一般式を表わしているが, 逆に時間領域から周波数領域への変換の一般式を得ることは不可能である。その意味で $S_y(f)$ のほうが周波数安定度の第一義的な尺度であるといえる。

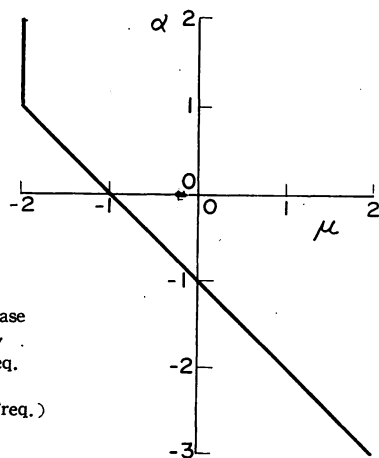
$S_y(f)$ が次のような特別の形をとる場合を考える。

$$S_y(f)=\begin{cases} h_\alpha f^\alpha, & 0 \leq f \leq f_h \\ 0, & f > f_h \end{cases} \quad (12)$$

ここで, h_α , α は定数である。このとき(11)式は N, r を一定とすると,

$$\langle\sigma_y^2(N, T, \tau)\rangle \sim |\tau|^\mu, \quad 2\pi\tau f_h \gg 1 \quad (13)$$

μ と α の関係を第1図に示す。これから, 時間領域での測定で μ がわかると α を決定できる。さらに, (11)式



第1図 α 対 μ

第 1 表

	$S_y(f) = h_2 f^2$ (附加雑音)	$S_y(f) = h_0$ (内部附加雑音)	$S_y(f) = h_{-1} f^{-1}$ (フリッカ雑音)
$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$	$h_2 \cdot \frac{N + \delta_k(r-1)}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$	$h_0 \cdot \frac{ \tau ^{-1}}{2}$	$(N, r \text{ の関数})^*$
$\langle \sigma_y^2(N, \tau, \tau) \rangle$	$h_2 \cdot \frac{N+1}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$	$h_0 \cdot \frac{ \tau ^{-1}}{2}$	$h_{-1} \cdot \frac{N \ln N}{N-1}$
	$\delta_k(r-1) = \begin{cases} 1, & r=1 \\ 0, & r \neq 1 \end{cases}$		

$$* h_{-1} \cdot \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (N-n) \left[-2(nr)^2 |n(nr) + (nr+1)^2 |n(nr+1) + (nr-1)^2 |n(nr-1)| \right]$$

から h_a も求めうる。このように(4)式は時間領域から周波数領域へ変換できる特別の場合を示している。実際、周波数標準器の雑音は(4)式の重ね合わせでじゅうぶん表現できる。

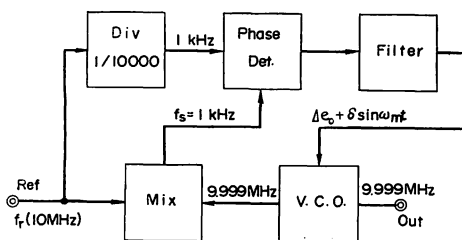
(4)式の形をとる雑音のおもなものについて(4)式を計算すると第1表ようになる。また、これを τ について定性的に図示すると第2図のようである。これから次のことがいえる。

(1) 付加雑音(白い位相雑音)は τ が1秒前後より短い範囲で支配的に影響する。帯域幅に密接に関係するので測定に当っては測定帯域幅を明記する必要がある。

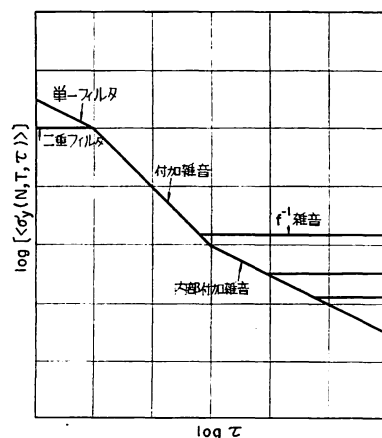
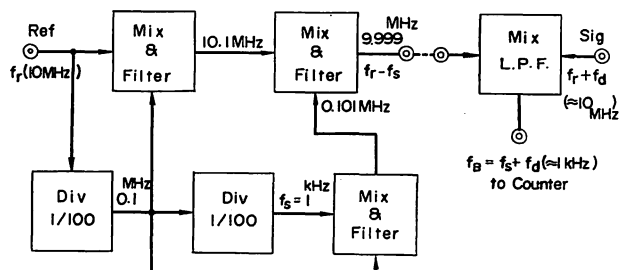
(2) 内部付加雑音(白い周波数雑音)は原子周波数標準器において特に重要である。だいたい τ が1秒前後以上からフリッカ雑音の支配するようになる数時間くらいまでの間で支配的になる。

(3) フリッカ雑音は水晶標準器では τ が秒前後から、原子標準器では数時間程度から支配的になる。第1表からわかるように、 N, r が一定なら周波数安定度は τ に対して一定である。また、 N とともに大きくなり、 $N \rightarrow \infty$ で発散してしまう。したがって、測定に際しては N, r を明記する必要がある。

3. 離散的雑音と周波数安定度⁽⁶⁾



第3図(a) 同期発振器方式 (b) 混合方式



第2図 周波数安定度におよぼす各種雑音の影響

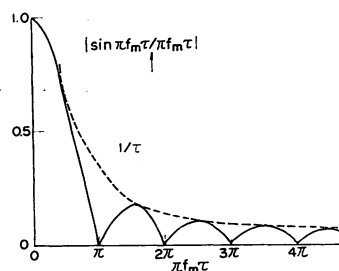
原子線の共鳴線の検出や比較的短時間で高精度の周波数(安定度)の測定を行うときなどに周波数合成器が必要である。合成器には大別して同期方式と混合方式とがあるが、いずれもその合成の過程で離散的雑音で FM (PM) 変調をうける(第3図)。簡単のため一つの変調成分のみを考えると、(1)式の $\phi(t)$ は

$$\phi(t) = \delta \sin 2\pi f_m t, \quad \delta \ll 1 \quad (14)$$

ここで、 δ は変調指数、 f_m は変調周波数である。(7)、(8)式から、

$$\sigma_y(\infty, \tau) = \frac{\sqrt{2}\delta}{2\pi\nu\tau} \left| \sin \pi f_m \tau \right| \quad (15)$$

(15)式の変化の様子を第4図に示す。図において最大値



第4図 離散的雑音による周波数安定度の変化

$$f_B = f_s + f_d (\approx 10 \text{ MHz}) \text{ to Counter}$$

の軌跡は付加雑音のときのように $1/\tau$ の変化をするが、 $f_m\tau$ が整数のところでは零になっている。周波数カウンタの周波数カウントでは、 $\tau=1\text{ ms}, 10\text{ ms}, \dots, 10\text{ s}$ のような値をとるから、たとえば $f_m=1\text{ kHz}$ では $\sigma_y(\infty, \tau)$ はこれらのすべての τ に対して零となる。一般に、普通の測定におけるように τ が不連続の測定では離散的雑音による周波数安定度は正確には得られない。

(8)式は厳密には τ が一定、したがって周波数カウンタの場合の式である。ところが、高精度測定には普通周期測定が行なわれるが、この場合は τ 自身が変化するので若干異なる検討が必要である。

いま離散的雑音の影響を受けた瞬時周波数 $f_B + \dot{\phi}(t)/2\pi$ を $t \sim t+\tau$ の時間にわたり M 周期測定するとすると、(4)式を用いて

$$\{2\pi f_B(t+\tau) + \delta \sin 2\pi f_m(t+\tau)\} - (2\pi f_B t + \delta \sin 2\pi f_m t) = 2\pi M \quad (6)$$

$\tau \equiv \tau_0 - 4\tau$, $\tau_0 \equiv M/f_B$ とおくと(4)式は、

$$2\pi f_B 4\tau = \delta \sin 2\pi f_m(t+\tau) - \delta \sin 2\pi f_m t \quad (7)$$

4τ はカウンタの周期測定における一つ一つのばらつきを表わしている。

(7)式は信号を連続的にカウントした場合（カウントとカウントの間をあげない）、それが正弦波的に値が変化することを意味している。そして、周波数カウントのとき論じたように、変調周波数と平均測定時間との関係に依存することを示している。これらの点を周波数カウントのときのようにもっと明確に論じられるようにつぎのような場合について考える。

周波数合成器入力（基準信号）周波数を f_r 、出力周波数を $f_r - f_s$ とし、これと他の信号（被測定信号）周波数 $f_r + f_d$ ($f_r \gg f_d$) を混合して $f_B = f_s + f_d$ ($f_s \gg f_d$) を得て周期測定をする（第3図(b)）。また、普通に起り得るように、離散的雑音周波数 f_m が f_s の整数倍で与えられるとすると、

$$f_m = k f_s, \quad k=1, 2, \dots \quad (8)$$

また、

$$\tau_0 = M/(f_s + f_d) \cong (M/f_s)(1 - f_d/f_s) \\ \equiv \tau_s - \tau_d \quad (9)$$

ここで、 $\tau_s \equiv M/f_s$, $\tau_d \equiv \tau_0 f_d/f_s$

(8), (9)式を用い、かつ、 τ_d , 4τ がじゅうぶん小さく、

$$\sin 2\pi f_m(\tau_d + 4\tau) \cong 2\pi f_m(\tau_d + 4\tau) \quad (10)$$

が成立するとすると(*)、(7)式は結局

$$(f_B/f_r)(4\tau/\tau_0) \cong (k\delta f_d/f_r) \cos 2\pi f_m t \quad (21)$$

(21)式は周波数安定度の形式 $(\Delta f/f)$ となっており、カウンタの一つ一つのばらつきを表わしている。(21)式のRMS値をとると、

$$\sigma_y(\infty, \tau) = (k\delta/\sqrt{2})(f_d/f_r) \quad (22)$$

すなわち、(21)式の条件の成立する範囲で $\sigma_y(\infty, \tau)$ は二つの発振器の差周波数に比例する。

これから次のような興味ある事実がわかる。

(1) $f_d=0$ のとき $\sigma_y(\infty, \tau)=0$ 。したがって、装置自身の性能を測るためにとられる共通入力法（二つの入力に同一の発振器から信号を入れることにより、発振器の影響を打ち消すことができる）はこの場合正しくない。

(2) (22)式は τ_0 に対し一定であるから（ f_B を一定とする）、周波数安定度のよい τ_0 の比較的大のところでは影響が大きい。

(3) (22)式の成立する範囲で f_d/f_r は周波数通倍に対して一定に保たれるから、周波数通倍後に合成器を用いてその影響を軽くするという考え方は正しくなくなる。

τ_d が一般の値をとるとき、(7)式は $4\tau \ll 1$ として、

$$\sigma_y(\infty, \tau) = (\sqrt{2}\delta/2\pi f_r \tau_0) |\sin \pi f_m \tau_d| \quad (23)$$

となり、(23)式と同一の形式になる。(23)または(22)式の最大値は $\sqrt{2}\delta/2\pi f_r \tau_0$ であり、これがじゅうぶん小さい必要がある。

(例) $f_r=10\text{ MHz}$, $\tau_0=1\text{ sec}$ とすると、

$$\delta \leq -60\text{ dB} \text{ で、 } \sigma_y(\infty, \tau)_{\max} \leq 2 \times 10^{-11}$$

$$\delta \leq -80\text{ dB} \text{ で、 } \sigma_y(\infty, \tau)_{\max} \leq 2 \times 10^{-12}$$

離散的雑音が複数列のときの周波数安定度は(22)式または(23)式の和で与えられる。したがって、一つ一つの雑音レベルはじゅうぶん小さい必要がある。また、 N, r の一般のときは、 N があまり小さくなければ普通これらにあまり影響されない。

* (22)式の成立する範囲について検討してみる。例として、 $M=10^3$, $f_B=10^3\text{ Hz}$ ($\tau_0=M/f_B=1\text{ sec}$), $k=1$ とする。(22)式が成立するためには、

$$f_m \tau_d = \frac{kM}{f_B} \cdot f_r \cdot \frac{f_d}{f_r} < \frac{1}{6} \\ \therefore \frac{f_d}{f_r} < \frac{1}{6kM} \cdot \frac{f_B}{f_r}$$

したがって、上の数値例では

$$f_r=10^7\text{ Hz} \text{ で、 } f_d/f_r < 1.6 \times 10^{-8}$$

$$f_r=10^8\text{ Hz} \text{ で、 } f_d/f_r < 1.6 \times 10^{-9}$$

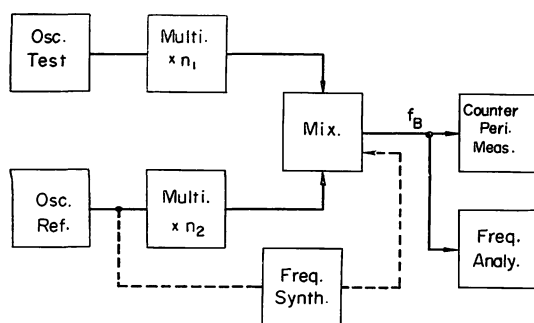
$$f_r=10^9\text{ Hz} \text{ で、 } f_d/f_r < 1.6 \times 10^{-10}$$

4. 測定方法

一般に短期安定度はカウンタによる周期測定と周波数測定の二つの方法によっている。実際、次の方法で測定した。

4.1. 周期測定

比較する二つの信号を適当に通倍して差周波数によるビートを周期測定する場合と、二つの信号の差周波数に関係なく所期の測定用ビートを得るために周波数合成器を用いる方法とがある(第5図)。周波数安定度は次式により計算する。



第5図 高精度周波数安定度の測定系列

$$\sigma_y(N, T, \tau) = (f_B / n\nu_0) [(d\tau)_{rms} / \tau_0] \\ = (M / n\nu_0) [(d\tau)_{rms} / \tau_0^2] \quad (24)$$

n は通倍次数である。(24)式の測定を何回も行なって平均をとるようにすると、それだけ測定値の信頼度が増す。今回の測定では $N=100$ ($\tau_0 \leq 1$ sec), $N=50$ ($\tau_0=10$ sec) とし、各 τ_0 についての測定を1回ずつ行なった。

(1) 10 MHz 測定

前章で述べた理論的検討に従って 9.999 MHz の周波数合成器を作った(第3図(b))。3個の水晶ろ波器を使用して離散的雑音レベルを -90 dB 以下にできた。合成器を含む測定系のその他の雑音(system noise)の影響については第6図以降に示してある。

被測定 10 MHz 信号と合成器出力 9.999 MHz とを混合して約 1 kHz のビートを得、これを周期測定し

第2表

M	1	10	10^2	10^3	10^4
$\tau_0 = M/f_B$ (sec)	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10
精 度	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}

た。測定時間と測定精度(カウンタの最終1カウントの $0.1 \mu s$ に対応する)を第2表に示す。

測定帯域幅 50 kHz (3 dB down)

合成器帯域幅 ± 3.5 kHz (6 dB down)

(2) 1,440 MHz 測定

Hメーザ同期出力 1 MHz と他の信号を 1,440 MHz まで通倍して混合し、差周波数によるビート 100~800 Hz を周期測定した。system noise は第6図以降に示してある。

測定帯域幅 6 kHz

4.2. 周波数測定

商用の測定器で、1 MHz $\times 10^{-9}$ MHz を何段も重ねて等価的に高次通倍し、1 MHz 出力を周波数カウントする方式のものを使用した。

$$\sigma_y(N, T, \tau) = (df)_{rms} / n\nu_0 \quad (25)$$

たとえば、 $\tau_0=1$ sec の測定で最終ケタは 1 Hz であるから、 1×10^{-11} の精度をうるには通倍次数 $n=10^5$ ($n\nu_0=10^{11}$, $\nu_0=1$ MHz) 必要である。

測定帯域幅 フィルタ OFF で ± 5 kHz

フィルタ ON で 0.1 kHz

($n=10^2 \sim 10^4$)

± 1 kHz ($n=10^5$)

± 5 kHz ($n=10^6$)

5. 測定結果

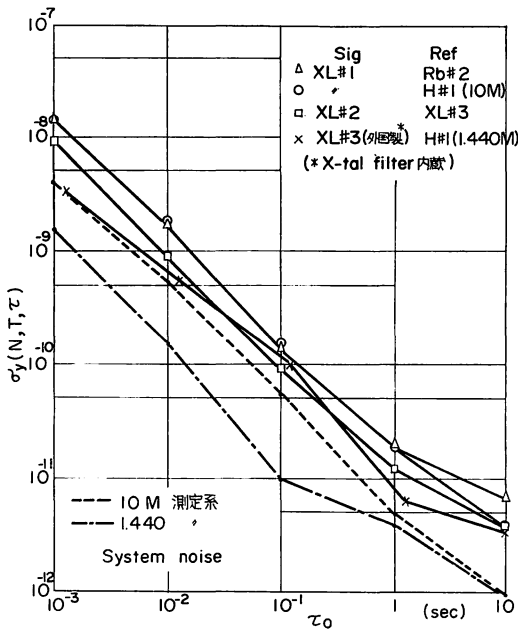
比較的最近の水晶発振器(国産2, 外国産1, XL# の記号で表示), Rb 原子発振器(外国産1, 実験器1, Rb# の記号で表示), 水素メーザ同期出力(1 MHz, H# で表示), Cs 原子発振器(外国産1, Cs# で表示)について、 $\tau_0 \approx 10^{-3} \sim 10$ sec にわたり測定し、得られたデータを電算機で最小二乗法処理をして R.M.S. 値を求めた。そして、(24), (25)式を用いて周波数安定度を計算した。結果を第6~第8図に示す。

5.1. 単独発振器の安定度の計算

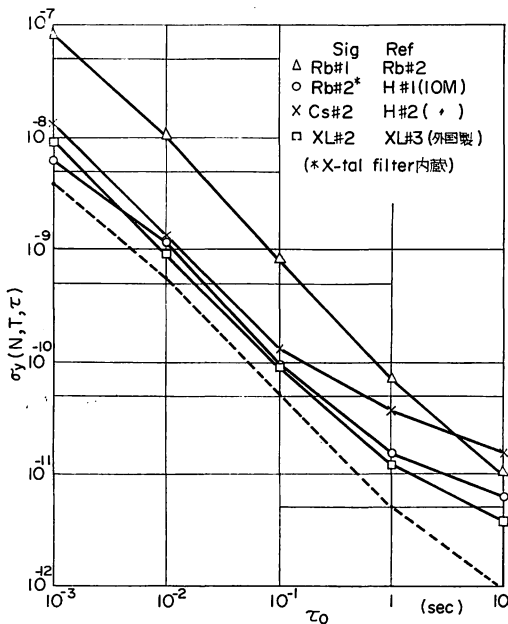
得られたデータは二つの発振器間の比較値であるから、これから各々の発振器の安定度を分離するには次のようにすればよい。

$$\begin{cases} \sigma_{12}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \sigma_{23}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\ \sigma_{31}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \end{cases} \quad (26)$$

ここで、 σ_s^2 は system noise による分散、 σ_{ij}^2 は発振



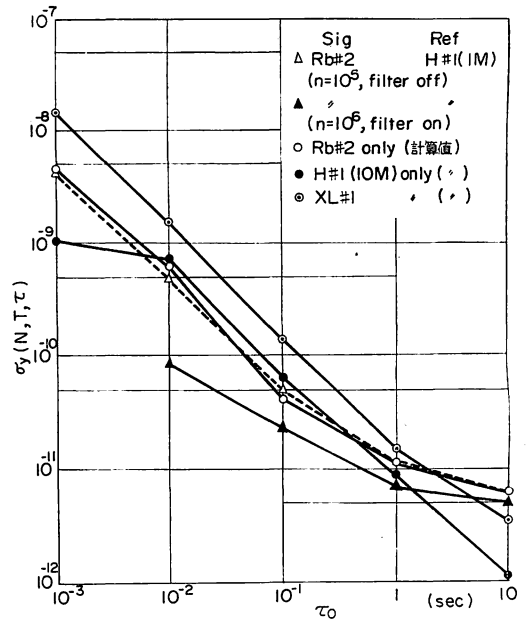
第6図 測定結果(1)



第7図 測定結果(2)

器 i と j の相互比較による分散, σ_i^2 は発振器 i の分散の計算値であり, 式(27)右辺の各分散値は互いに独立であるとすると, 式(27)から,

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_s^2) \\ \sigma_2^2 = \sigma_{12}^2 - \sigma_s^2 - \sigma_1^2 \\ \sigma_3^2 = \sigma_{31}^2 - \sigma_s^2 - \sigma_1^2 \end{cases} \quad (27)$$



第8図 測定結果(3)および単独発振器の計算例

これらの発振器の一つを基準にとると他の未知の発振器の分散が求まる。

$$\sigma_x^2 = \sigma_{xi}^2 - (\sigma_s^2 + \sigma_i^2) \quad (28)$$

実際の計算例を第8図に示している。ただし, σ_s^2 は H #1 (10 MHz) を用いて共通入力法で測定し, 各データは 10 MHz 周期測定によって得たものである。しかし, この計算例には次のようなふじゅうぶんさがある。

- (1) σ_{ij}^2 は 1 回の測定のみによっているため比較的ばらつきが大きい。
- (2) 二つの信号に対する System の帯域幅が異なる。
- (3) 発振器自身の分散と System noise によるそれとがあまりちがわない。

5.2. 測定結果についての検討

- (1) $\tau_0 = 1 \sim 100$ ms ではほぼ $1/\tau_0$ の傾向を示している。
- (2) Rb #2, H, XL #3 の場合, 10 MHz 周期測定では精度が若干不足である。しかし, 通倍によって System noise が増すことも考えると (1,440 MHz の System noise の影響を参照), 100 MHz 測定でじゅうぶんであると考えられる。
- (3) Rb #1 (実験器) は出力回路の周波数合成器によって離散の雑音で PM 変調をうけ, 安定度を著しく悪くしている。
- (4) 短期安定度は測定帯域幅により影響される。した

