

解 説

UDC 629.783

人工衛星の打上げ方式の比較

高橋 耕三*

(昭和 47.12.20 受理)

COMPARISON BETWEEN LAUNCH TRAJECTORIES
OF SATELLITES
BY
Kozo TAKAHASHI

First the method of derivation of the force equation for the rocket is introduced and compared with that of the force equation for the satellite, and then the radio guidance system, the inertial guidance system, and the radio inertial guidance system are explained and compared. Then are explained the launch trajectories to stationary and low or medium altitude orbits by the rocket whose stages are all guided or the last one is not guided. Lastly there are compared variations in the launch vehicle payload, the accuracy of the final orbit, etc. caused by the launch trajectories and guidance systems.

概要

ロケットの運動方程式の誘導過程を説明し、人工衛星のそれと比較する。次にロケットの電波誘導・慣性誘導・電波慣性誘導の説明とそれらの比較を行なう。最後に、人工衛星を中高度または静止軌道に中緯度地方から打上げる際、最終段が無誘導のロケットによる場合と、全段誘導方式のロケットによる場合とを、打上げ経路、精度、最大荷重等の見地から比較検討する。

1. ロケットの運動方程式

人工衛星の運動方程式は惑星のそれとほぼ同じであるから、ケプラーとニュートンにより17世紀に発見されているわけであるが、ロケットの運動方程式は19世紀末になってようやくチオルコウスキにより誘導された。その動機となったのは、惑星が爆発すると破片の重心はもとの位置に留まるが、破片の一部は太陽系の外に飛び去って

しまうことの発見であった。原理は、爆発や燃焼の際も運動量保存則が成り立つことであり、ロケットとその噴射ガスの運動量の和が保存されることを応用すると、真空中でも物体を動かすことが可能なことが示された。

外力を \mathbf{F} 、時間を t 、運動量を \mathbf{P} 、質量を M 、速度を \mathbf{v} とすると、運動方程式は

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \dots\dots(1)$$

上式に

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}$$

を代入し微分すると

$$\mathbf{F} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \dots\dots(2)$$

M が一定ならば

$$\mathbf{F} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \dots\dots(2')$$

相対論的效果による質量の変化を考慮する必要のあるときだけ(2)が用いられ、通常のロケットやその噴射物質は光速よりもはるかに遅いため(2')が用いられる。

* 衛星研究部 衛星管制研究室

ロケットの運動方程式では、保存される運動量 \mathbf{P} はロケットと噴射された物質の運動量の和であるから、 m をロケットの質量、 v をロケットの速度、 u を噴射された物質のロケットにたいする相対速度、すなわち $v+u$ を t 噴射された物質の速度とすると

$$\mathbf{P} = mv + \int_0^{n_t} (\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n) dn \quad \dots(3)$$

ここに n_t : 噴射された物質の質量。 P 、 m 、 v 、 n_t は時刻 t における値。 \mathbf{u}_n 、 \mathbf{v}_n は噴射された質量が n のときの u 、 v の値。

ロケットの初期質量を m_0 とすると

$$m_0 = m + n_t \quad \dots(4)$$

(3)に代入すると

$$\mathbf{P} = mv + \int_{m_0-m}^{m_0} (\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n) dm$$

u_n が一定で u に等しいと仮定して時間で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}(mv) - (u+v) \frac{dm}{dt} \\ &= m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

(1)に代入すると

$$\mathbf{F} + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad \dots(5)$$

上式は、外力 \mathbf{F} が零ならば、ロケットと噴射された物質の運動量の和の保存則（微分型）を示す。

ところで、噴射される物質のロケットにたいする相対速度 u が一定のときは

$$\begin{aligned} u \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt}(mu) = \frac{d}{dt} [(m_0 - n_t)u] \\ &= -\frac{d}{dt}(n_t u) \end{aligned}$$

となるから、(5)は、外力が働くないときは、左辺の噴射された物質に働くロケットにたいする相対慣性力と、右辺のロケットに働く慣性力が等しいことを示している。見かけ上左辺の $u(dm/dt)$ は外力と同じ効果を持つため、ロケットの推力という。これを

$$\mathbf{T} = u \frac{dm}{dt} \quad \dots(6)$$

とおき、(5)に代入すると

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} = m \frac{dv}{dt} \quad \dots(7)$$

上式がロケットの運動方程式と云われている。外力は、ロケットに働く重力 mg (g : 重力の加速度 = 9.80665m/s²) や空気抵抗 F_a などであるから、これらを代入すると

$$\mathbf{T} + mg + F_a = m \frac{dv}{dt} \quad \dots(8)$$

ロケットの燃料の燃焼時間が短く、その間の高度変化が少なく、 g を一定と仮定でき、かつ $F_a = 0$ のとき

は、(8)は簡単に積分できる

$$v - v_0 = u \log(m/m_0) + g(t-t_0)$$

ここで、 v_0 、 m_0 は $t=t_0$ のときの v 、 m の値

燃焼終了時の t 、 v 、 m の値を t_b 、 v_b 、 m_b とすると

$$v_b - v_0 = u \log(m_b/m_0) + g(t-b) \quad \dots(9)$$

ロケットの噴射物質の運動量は、ロケットの推進剤の燃焼または加速によって得られる。推進剤の性能は単位質量の推進剤が燃焼によって出す推力とその持続時間で評価されるから、(6)の絶対値を時間で積分し、初期質量で割ったものを推進剤の性能の指標とすることができる。その単位は〔長さ / 時間〕となるが、単位系のとりかたで値が変わるので避けるためと、工学（特にヤード・ポンド法）では質量の単位で表現されている数値で重量または力の値を示す習慣があるため、前もって質量に重力の加速度 g を掛けた項で(6)の絶対値を割って積分すると

$$\begin{aligned} I_{sp} &= \frac{1}{n_0 g} \int_{t_0}^{t_b} |\mathbf{T}| dt = \frac{u}{n_0 g} \int_{t_0}^{t_b} \left| \frac{dm}{dt} \right| dt = \frac{u}{n_0 g} \int_0^{n_0} dm \\ &= u/g \end{aligned}$$

ここに $t=t_0$ のとき、ロケットの質量は推進剤の初期質量 n_0 のみからなり、 $t=t_b$ のときロケットの質量は零とする。 u は u の絶対値である。

上式の u/g を比推力 I_{sp} (Specific Impulse) と呼び、秒の単位で表わし、推進剤の性能の指標に用いる。

我が国で開発中のNロケットの第1段と第2段は液体燃料を用い、その I_{sp} は 275°~297°、第3段と補助ブースタは固体燃料を用い、その I_{sp} は約 290° と 222° 程度の値である。噴射されたガスの2乗平均速度は、ガスの温度と分子量の比に比例するため、液体水素と液体酸素の2液式推進剤の場合、 I_{sp} を 443° 程度まで高めることができる。

多段式ロケットの場合は各段毎に(8)を解けば最終段の速度が得られるが、定性的な結果を得るため、(9)を用い、その重力の項も無視すると、第N段の最終速度 v_N は次式のようになる。

$$v_N = \sum_{i=1}^N u_i \log(m_0/m_b)_i \quad \dots(10)$$

ここに u_i は第 i 段の噴射物質のロケットにたいする相対速度、 $(m_0/m_b)_i$ は第 i 段の初期質量と燃焼後の質量の比、初段の初速度は零とする。

(10)はロケットは段数を多くした方が効率がよいこと、すなわち燃料タンクやケースはなるべく細分し、不用になったものは早く切り捨てた方が効率がよいことを示しているが、実際はエンジン停止・切離し・点火をするのに時間がかかり、特に切離し後ロケットの振動がおさまるのを待って姿勢制御・点火をする時間がかなり長く、その間に重力の項が利いてくるためと、エンジンや分離

・点火装置の質量もかなり大きいため、あまり段数を増やすことは得策ではない。このため、多くのロケットは、本体は2段ないし3段とし、本体の燃焼とは独立にエンジン点火・切離しを行なう固体燃料の補助ブースタを2ないし9本持つのが普通である。

2. ロケットの誘導

ロケットを砲弾のように誘導しないで打上げると、いわゆる弾道軌道は描くが、最終段が人工衛星の軌道に乗る可能性はほとんどない。このため衛星を予定軌道に高い確率で打上げるにはロケットの誘導が不可欠となる。

ロケットの誘導法を大きくわけると、電波誘導方式と慣性誘導方式となる。

電波誘導方式とは、地上での電波や光によるロケットの観測またはロケットから送られてくるデータで、ロケットの位置・運動・姿勢を地上で計算し、ロケットにたいする必要な指令を電波で与えて、これを誘導する方式である。ロケットの位置は通常パルスが地球局とロケット間を往復する時間から、または地球局とロケット間を往復する送受信波の変調波の位相差から検出し、ロケットとの相対速度はドプラ変移から検出する。ロケットの姿勢は地上で観測することが困難なため、ロケットに搭載された姿勢センサ（通常はジャイロ）の信号を地上で受信して検出する。電波誘導の特徴は、ロケットの飛しょう時間が長くなても、観測データが途切れないと、誘導誤差は増加せずむしろ誘導精度が向上することである。しかしロケットの飛しょうデータ取得のため、または誘導指令のための局を、ロケットの可視領域にいくつか設け、それらを中継回線で結ぶ必要がある。

慣性誘導方式は、ロケットの位置・速度・姿勢などをロケット内で算出し、地上の介入なしにロケット単独でこれを誘導する方式である。この方式を用いた最初のロケットはドイツのV2号である。慣性誘導方式は、ジャイロの自転軸方向の保存性を利用して、その誤差は時間とともに累積され、長時間の誘導には不向きであるが、ロケットの発射後は、ロケットに故障さえなければ打上げ地上施設が総てその機能を止めても、ロケットは予定通り飛しょうするという大きな利点がある。

ロケットの誘導方式をジャイロや加速度計の使用法で分類すると、安定化プラットホーム方式とストラップダウン方式になる。

安定化プラットホーム方式。自転軸が互に直交した3組のジャイロを、三重または四重ジンバルで支えたプラットホームに固定して、プラットホームのあらゆる方向の回転を検出し、検出した回転角と同じ量だけプラットホームを逆方向に回転させて、プラットホームを常に基

準面に一致させる。このプラットホームの面ベクトル方向の回転ベクトルが零、すなわち面内の点が慣性系にたいして回転しない状態のときは、その面内の加速度を検出する加速度計の零点誤差が累積するため、プラットホームの一部を4重ジンバルで支え、直交した2個の加速度計をこの面に固定し、約1 rpmで回転し、その回転ベクトルを一定に保ってその面内の加速度を検出することが多い。ロケットの姿勢はこのプラットホームの自転していない部分とロケットの相対角から検出し、速度と距離は加速度計の出力を1回または2回時間で積分して算出する。軍用機と大型の民間機の多くもこの方式を利用した自動操縦装置を載んでいる。

ストラップダウン方式。ロケットの回転や加速度の検出に用いるジャイロのジンバルや加速度計がロケットの構体に固定されている誘導方式で、姿勢や特定方向の加速度を直接検出することはできず、ロケットの速度や位置も加速度計と積分回路の組合せだけでは算出できない。この誘導方式を、使用するジャイロでさらに分類すると、フリー・ジャイロ（ポジション・ジャイロ）方式、レイト・ジャイロ方式・積分ジャイロ方式になる。フリー・ジャイロは、ジャイロを3重ジンバルで支えただけの最も簡単なジャイロであり、ジャイロの自転軸方向の保存性を利用して、自転軸方向とロケットの相対角から姿勢を検出する。2個のフリー・ジャイロでロケットの姿勢が算出できる利点があるが、時間とともに累積される誤差が大きいと、姿勢の算出が複雑なため、実験用ロケット以外はあまり用いられていない。レイト・ジャイロは入力軸方向の回転角速度に比例した信号を出力し、積分ジャイロは入力軸まわりの回転角に比例した信号を出力する。ロケットの姿勢を知るには直交した3個のレイト・ジャイロまたは積分ジャイロが必要である。

安定化プラットホーム方式とストラップダウン方式とを比較すると、前者は後者よりも高精度、高価格となるが、姿勢や速度・位置を算出するための演算装置は簡単ですむ。このため電波誘導に安定化プラットホーム方式を用いることはないが、ストラップダウン方式は演算装置もロケットに搭載して慣性誘導方式に用いる場合と、演算は地上で行なう電波誘導方式に用いる場合とがある。

現在の中型および大型ロケットの多くは、電波誘導と慣性誘導を併用した電波慣性誘導方式をとっている。すなわち通常は慣性誘導のみを行ない、誘導誤差は地上で算出し、誤差が許容値以上になると、地球局からの電波指令で修正し、誘導精度を一定に保つ。この併用方式は誘導時間に無関係に短時間の慣性誘導と同じような高精度の誘導が可能であると同時に、慣性誘導装置と電波誘

導装置を互に冗長系にしておくと、一方が故障しても誘導誤差は大きくなるが他方だけでロケットの打上げが続行できる利点がある。また打上げ後、打上げ支援装置が故障しても電波誘導装置の故障と同じ結果にしかならない。我国で開発中のNロケットは電波誘導方式をとる予定である。

3. 人工衛星の運動方程式

衛星の運動の法則は、1609—1618年にケプラーが発見した惑星の運動に関する三法則から、1666—1687年にニュートンにより誘導された。

質点に働く外力を \mathbf{F} 、その位置を \mathbf{r} 、質量を m とする、質量の変化が無視できるときは、質点の運動方程式は次式のようになる。

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad \dots \dots \dots (11)$$

地心並進運動座標系（近似的に地心慣性座標系）で、衛星の質量を m 、地心から衛星までの距離を r とすると、(11)は非常に高い精度で人工衛星の運動方程式となる。

\mathbf{r} 方向の単位ベクトルを \mathbf{a}_r 、 \mathbf{r} の回転角を θ 、回転の単位ベクトルを \mathbf{a}_θ とすると、(11)は

$$\mathbf{F} = m \{ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{a}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{a}_\theta \} \quad \dots \dots \dots (12)$$

上式の第2項が遠心力であり、第4項がコリオリの力である。外力が万有引力のみで、地球の等ポテンシャル面が完全な球形ならば、(12)の左辺は \mathbf{r} と平行になり \mathbf{a}_θ の係数は零となるから

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

時間で積分し、積分常数を h とすると

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \dots \dots \dots (13)$$

上式は面積速度一定の法則である。地球が完全な球形ではないため、人工衛星の場合は近似的にしか成立しない。(12)の \mathbf{a}_θ の項を無視すると

$$\mathbf{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{a}_r \quad \dots \dots \dots (14)$$

\mathbf{F} に万有引力を代入すると

$$-kma_r/r^2 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{a}_r$$

ここで k ：地心重力常数 = $3.98603 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$ 変形すると

$$k/r^2 = r^2\dot{\theta}^2 - \ddot{r} \quad \dots \dots \dots (15)$$

(13)と(15)からなる2元2次微分方程式を解くと

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad \dots \dots \dots (16)$$

ここで e と ω は積分常数。

$$\theta - \omega = w$$

とおくと

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos w} \quad \dots \dots \dots (17)$$

さらに

$$h^2/k = a(1 - e^2)$$

とおくと

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w} \quad \dots \dots \dots (18)$$

$0 \leq e < 1$ の場合、上式は円または長円を表わし、 a は長半径、 e は離心率、 w は真離角を示すことになる。地心と近地点の距離を r_p とすると、離心率の定義から

$$r_p = a(1 - e) \quad \dots \dots \dots (19)$$

(18)に代入すると

$$r = \frac{r_p(1 + e)}{1 + e \cos w} \quad \dots \dots \dots (20)$$

円軌道の場合は

$$\dot{r} = 0$$

となるから(14)は

$$k/r^2 = r\dot{\theta}^2$$

となり、万有引力が遠心力に等しくなる。このとき(16)は

$$r = a = h^2/k$$

となる。

点 \mathbf{r} での衛星の速度を \mathbf{v} 、 \mathbf{r} と \mathbf{v} のなす角を $\pi/2 - \beta$ とすると（第1図参照）、(13)、(16)、(17)から

$$v \cos \beta = r\dot{\theta} = h/r \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$v \sin \beta = \dot{r} = -h \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = \frac{ke \sin w}{rv \cos \beta} \quad \dots \dots \dots (22)$$

(17)と(21)から h を消去すると

$$\frac{rv^2}{k} \cos^2 \beta - 1 = e \cos w \quad \dots \dots \dots (23)$$

変形すると

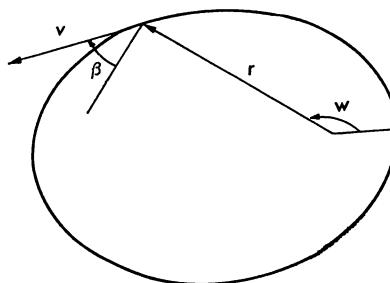
$$\cos w = \left(\frac{rv^2}{k} \cos^2 \beta - 1 \right) / e$$

(22)から

$$\sin w = rv^2 \sin \beta \cos \beta / (ke)$$

よって

$$\tan w = \frac{rv^2 \sin \beta \cos \beta}{\left(\frac{rv^2}{k} \cos^2 \beta - 1 \right)} \quad \dots \dots \dots (24)$$



第1図 衛星の軌道と位置および速度ベクトル

また(22)から

$$e \sin w = rv^2 \sin \beta \cos \beta / k$$

上式の2乗と(23)の2乗の和をとると

$$\begin{aligned} e^2 &= r^2 v^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta / k^2 + \left(\frac{rv^2}{k} \cos^2 \beta - 1 \right)^2 \\ &= \left(\frac{rv^2}{k} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \end{aligned} \quad \dots \dots (25)$$

単位質量の地心重力場の位置エネルギーを $-k/r$ とすると、その運動エネルギーと位置エネルギーの和は

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{r}$$

変形すると

$$2Er/k = rv^2/k - 2 \quad \dots \dots (26)$$

エネルギー保存則から軌道上の E は一定とする、(26)の v, r に近地点の値 v_p, r_p を代入してもよいことになる。近地点では w も β も零になるから、(23)から

$$e = r_p v_p^2 / k - 1$$

(26)に代入すると

$$2Er_p/k + 1 = e$$

(19)を代入すると

$$2Ea(1-e)/k + 1 = e$$

$e \neq 1$ だから、変形すると

$$2E/k = -1/a \quad \dots \dots (27)$$

(26)に代入すると

$$a = \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{k}} \quad \dots \dots (28)$$

(24), (25), (28) は人工衛星の真離角、離心率、長半径を r, v, β で表わしているから、任意の時刻の r と v が与えられれば人工衛星の軌道は完全に決定される。すなわち軌道要素のうち昇交点赤経 Ω と傾斜角 i は r と v を含む平面と赤道面との交線およびそれらのなす角から、 a は(28)から、 e は(25)から、近地点引数 ω は昇交点方向と r のなす角と(24)から得られる w の差から得られる。逆に衛星を希望する軌道に打上げるには(24), (25), (28)から r, v, β すなわち r と v の関係を求め、ロケットの最終段の燃焼終了時にその関係が満たされるように打上げればよい。円軌道の場合には

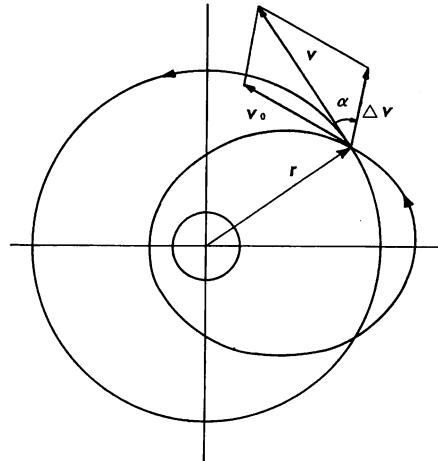
$$v^2 = k/r \quad \dots \dots (29)$$

$$\beta = 0$$

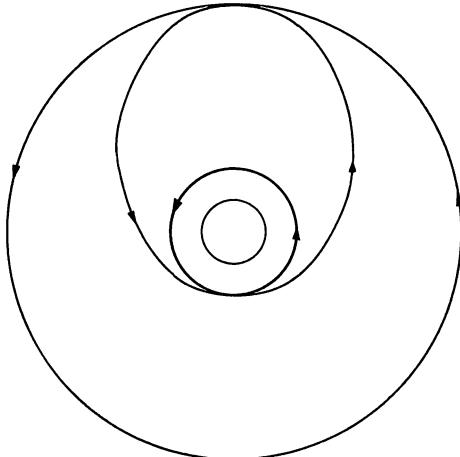
となるよう、すなわち重力と遠心力が釣り合うように衛星を水平に軌道に投入すればよい。

4. 軌道変換の際の効率

軌道上の任意の点で他の軌道に変換する際のエネルギー効率を考える。第2図の r 点での速度が v_0 の軌道上で、 v_0 と α の角をなす方向にロケットで Δv だけ増速



第2図 軌道変換



第3図 ホフマン軌道

すると、衛星の軌道は r 点の速度が v の軌道に変換されるものとする。ここに

$$v = \Delta v + v_0$$

スカラで書くと

$$v^2 = \Delta v^2 + v_0^2 + 2v_0 \Delta v \cos \alpha$$

上式は、 α が零のとき v が最大となることを示している。よって、新しい軌道ともとの軌道が交わらず接するように軌道変換するとき、そのエネルギー効率は最大となる。このような軌道変換を第3図のように2回繰り返し、内側の円軌道に外接し、外側の円軌道に内接する長円軌道で、円軌道から円軌道へ変換する際の長円軌道を特にホフマン軌道という。上記の理由から円軌道から円軌道へ変換するときは、ホフマン軌道によるのが最も効率がよい。(内側の軌道に外接し、外側の軌道に内接する軌道をホフマン軌道と言うこともある。)

次に軌道変換の効率と、ロケットや衛星の速度と質量

の関係を考える。 v_0 の速度で飛しょう中のロケットが、質量 n の燃料を消費して Δv だけ增速し、ロケットの質量が m 、速度が v となるものとすると、ロケットの運動エネルギーの増加は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+n)v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\Delta v + v_0)^2 - \frac{1}{2}(m+n)v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m\Delta v^2 + mv_0\Delta v - \frac{1}{2}nv_0^2 \end{aligned}$$

v_0 で偏微分すると

$$\frac{\partial E}{\partial v_0} = m\Delta v - nv_0$$

$v_0=0$ のとき $\partial E/\partial v_0 > 0$ だから、軌道変換の効率は

$$\Delta v/v_0 = n/m \quad \dots(30)$$

のとき最大となる。

例として、軌道傾斜角が零、近地点高度が 200km、遠地点高度が 35787km の長円軌道から静止軌道（傾斜角が零、高度が 35787km の円軌道）に変換する際、最大効率となる消費燃料と衛星の質量比を求める下記のようになる。

長円軌道の長半径を a_0 、離心率を e 、静止軌道の長半径を a とすると

$$a = a_0(1+e) \quad \dots(31)$$

長円軌道の遠地点での速度を v_0 、增速を Δv 、静止軌道の速度を v とすると、(31)から

$$\begin{aligned} v_0^2 &= k(2/a - 1/a_0) \\ &= k(1-e)/a \quad \dots(32) \end{aligned}$$

$$v^2 = k/a$$

よって

$$\frac{v-v_0}{v_0} = \frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1-e}} = (1-e)^{-1/2} - 1 \quad \dots(33)$$

(31)を書きかえ、 a と a_0 に数値を代入すると

$$\begin{aligned} e &= \frac{a}{a_0} - 1 = \frac{6378.16 + 35787}{6378.16 + \frac{200 + 35787}{2}} \\ &= 1 - 0.73009 \end{aligned}$$

(33)に代入すると

$$\Delta v/v_0 = 0.9248$$

よって(30)から $n/m = 0.924$ のとき軌道変換の効率が最大となる。

円軌道に打上げる際の軌道変換の回数と打上げエネルギーの関係の概略は下記のようにして求められる。

(1) 軌道変換が 1 回の場合

長半径が a_1 の長円軌道の遠地点で、半径 a の円軌道に変換する場合を考える。

質量 m の衛星を、長円軌道から円軌道に変換するのに要する燃料の質量を n とすると、 n の長円軌道上で

の位置エネルギーと公転運動エネルギーの和（以下力学的エネルギーと言う）は

$$E_1 = -kn/(2a_1)$$

地球の半径を a_e とすると、 n の地表の力学的エネルギーは、地球自転の影響を無視すると

$$E_0 = -kn/a_e$$

よって最終段の燃焼前の燃料に与えねばならない力学的エネルギーは

$$E_s = E_1 - E_0$$

$$= kn \left\{ \frac{1}{a_e} - \frac{1}{2a_1} \right\} \quad \dots(35)$$

遠地点で軌道変換するのだから、長円の離心率を e_1 とすると

$$a = (1+e_1)a_1 \quad \dots(36)$$

(9)で v_b 、 v_0 、 u が平行で v と u の方向が逆だから

$$v_b = v, v_0 = v_1, u = -u, t_b = t_0$$

とおくと

$$n = m \{-1 + e^{(v-v_1)/u}\} \quad \dots(37)$$

(33), (32)から

$$\begin{aligned} v - v_1 &= \sqrt{k/a} - \sqrt{k(1-e_1)/a} \\ &= \sqrt{k/a}(1 - \sqrt{1-e_1}) \end{aligned}$$

(37)に代入すると

$$n = m \{-1 + e^{\sqrt{k/a}(1 - \sqrt{1-e_1})/u}\} \quad \dots(38)$$

(36), (38)を(35)に代入すると

$$\begin{aligned} E_s &= km \left(\frac{1}{a_e} - \frac{1+e_1}{2a} \right) \\ &\times \{-1 + e^{\sqrt{k/a}(1 - \sqrt{1-e_1})/u}\} \quad \dots(39) \end{aligned}$$

e_1 で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial e_1} &= \frac{km}{2a} \left[1 + \left\{ \frac{1}{u \sqrt{1-e_1}} \sqrt{\frac{k}{a}} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{a}{a_e} - \frac{1+e_1}{2} \right) - 1 \right\} e^{\sqrt{k/a}(1 - \sqrt{1-e_1})/u} \right] \end{aligned}$$

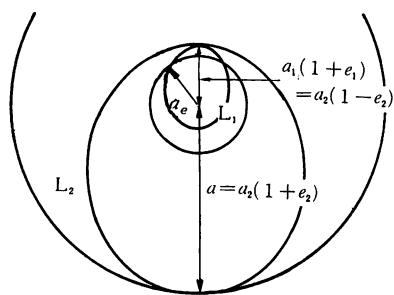
上式に通常用いられる値 $a_e = 6378.16$ km、 $a = 6.5 \times 10^3 \sim 4.3 \times 10^4$ km、 $u = 2.84$ km/s を代入すると

$$\frac{\partial E_s}{\partial e_1} > 0$$

よって e_1 が小さいほど E_s は小さくなる。すなわち e_1 が小さいほど最終段の燃焼前の燃料に与えねばならない力学的エネルギーは少くてすむ。しかし e_1 を零にすることは不可能で、長円が地球に外接し最終軌道に内接するときの e_1 が一番小さい。しかし実際は大気の抵抗の影響を少くするため、第9図の A_2B_2 ような軌道が選ばれる。

(2) 軌道変換が 2 回の場合

質量 m の衛星を、離心率 e_1 、長半径 a_1 の長円軌道 L_1 の遠地点で、離心率 e_2 、長半径 a_2 の長円軌道 L_2 に



第4図 軌道変換

変換し、その遠地点で半径 a の円軌道に変換する場合を考える（第4図参照）。

L_2 の遠地点で円軌道に変換するのに要する燃料の質量を n_2 とすると、 L_2 上での力学的エネルギーは

$$E_2 = -\frac{k}{2a_2}n_2$$

L_1 の遠地点で L_2 に変換するのに要する燃料の質量を n_1 とすると、その L_1 上での力学的エネルギーは

$$E_1 = -\frac{k}{2a_1}n_1$$

$n_1 + n_2$ の地表の位置エネルギーは

$$E_0 = -k(n_1 + n_2)/ae$$

よって、燃焼前の燃料に与えねばならない力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E_t &= E_1 + E_2 - E_0 \\ &= k\left(n_1\left(\frac{1}{ae} - \frac{1}{2a_1}\right) + n_2\left(\frac{1}{ae} - \frac{1}{2a_2}\right)\right) \end{aligned} \quad \dots \text{---(40)}$$

常に近地点で軌道変換するのだから

$$\begin{aligned} a &= a_2(1+e_2) \\ a_2(1-e_2) &= a_1(1+e_1) \end{aligned}$$

上式から

$$a_2 = \frac{a_1(1+e_1)+a}{2}$$

$$e_2 = \frac{a-a_1(1+e_1)}{a+a_1(1+e_1)}$$

L_1 の遠地点での速度を v_1 、 L_2 の近地点での速度を v_{2p} 、その遠地点での速度を v_{2a} 、円軌道の速度を v とし、噴射ガスのロケットにたいする相対速度をいずれも u とすると、 L_1 の遠地点で燃料を n_1 消費して軌道変換し、 L_2 の近地点とするときは、(37)と同様の誘導を行なうと

$$n_1 + n_2 + m \doteq (n_2 + m)e^{(v_{2p}-v_1)/u}$$

(28)の a に a_1 を、 r に L_2 の遠地点の値を代入すると

$$v_1^2 = k\left\{\frac{2}{a_1(1+e_1)} - \frac{1}{a_1}\right\} - \frac{k}{a_1} \cdot \frac{1-e_1}{1+e_1}$$

(28)に L_2 の近地点の値を代入すると

$$\begin{aligned} v_{2p}^2 &= k\left\{\frac{2}{a_2(1-e_2)} - \frac{1}{a_2}\right\} = \frac{k}{a_2} \cdot \frac{1+e_2}{1-e_2} \\ &= \frac{2ka}{a_1(1+e_1)(a_1(1+e_1)+a)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} v_{2p} - v_1 &= \sqrt{\frac{k}{a_1(1+e_1)}} \left\{ \sqrt{\frac{2a}{a_1(1+e_1)+a}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-e_1} \right\} \end{aligned}$$

L_2 から円軌道への変換を考えると

$$\begin{aligned} n_2 + m &\doteq me^{(v-v_{2a})/u} \\ v_{2a}^2 &= k\left\{\frac{2}{a_2(1+e_2)} - \frac{1}{a_2}\right\} = \frac{k}{a_2} \cdot \frac{1-e_2}{1+e_2} \\ &= \frac{2ka_1(1+e_1)}{a(a_1(1+e_1)+a)} \\ v^2 &= k/a \\ v - v_{2a} &= \sqrt{\frac{k}{a}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2a_1(1+e_1)}{a_1(1+e_1)+a}} \right\} \end{aligned}$$

上記の式を(40)に代入すると

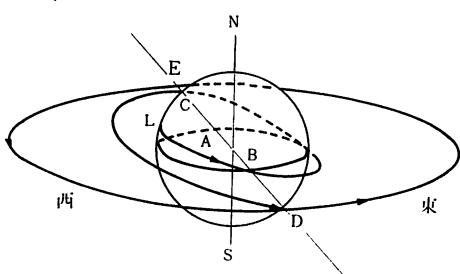
$$\begin{aligned} E_t &= km \left[\frac{1}{a_1(1+e_1)+a} - \frac{1}{ae} + \left\{ \frac{1}{2a_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{a_1(1+e_1)+a} + \left(\frac{1}{ae} - \frac{1}{2a_1} \right) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \frac{1}{e} \sqrt{\frac{k}{a_1(1+e_1)}} \left(\sqrt{\frac{2a}{a_1(1+e_1)+a}} - \sqrt{1-e_1} \right) \right\} \right] \\ &\dots \text{---(41)} \end{aligned}$$

(39)と(41)の a を静止軌道の半径とし、 e_1 と a_1 に静止衛星を打上げる際通常用いられる値をそれぞれ代入すると、 E_s と E_t の差はほとんどない。すなわち静止衛星打上げの際、燃焼前の燃料に与えねばならない力学的エネルギーは軌道変換の回数にほとんど関係しない。しかし軌道変換が1回の場合は、遠地点での初速度 v_0 が小さく増速 Δv が非常に大きくなり(30)の左辺は非常に大きくなるが、(37)に静止軌道の速度 $v=3.074757\text{km/s}$ と $u=2.84\text{km/s}$ を代入すると $n/m < 1.95$ となるため、軌道変換時の燃料と衛星の質量比と、増速量と初速度の比の関係が(30)から大きくずれ、打上げ効率は小さくなってしまう。

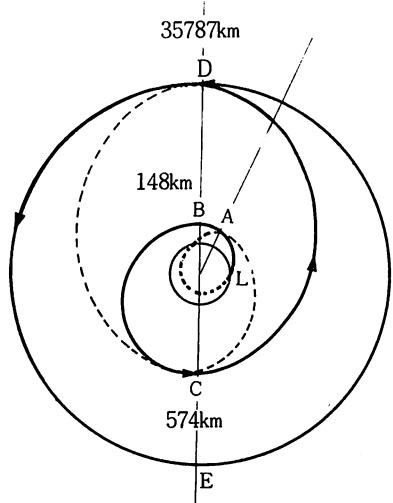
5. 人工衛星の打上げ軌道

中緯度地方から静止衛星を打上げる場合、全段慣性誘導の3段式ロケットによる方式と、第3段が無誘導のロケットとアポジモータを用いる方式を比較し、低中高度衛星を打上げる場合、全段誘導の2段式ロケットで打上げる方式と、最終段が無誘導の3段式ロケットで打上げる方式を比較検討する。

(1) 中緯度地方から全段慣性誘導の3段式ロケットでア



第5図 全段慣性誘導の3段式ロケットによる静止衛星の打上げ軌道



第6図 全段慣性誘導の3段式ロケットによる静止衛星の打上げ軌道

ポジ・モータを用いずに静止衛星を打上げる場合
代表的な全段慣性誘導の3段式ロケット、タイタン3Cで約1tonの静止衛星をフロリダから打上げる場合（例えばATS-F）は下記のようになる。

第5～6図のL点から地球の自転速度をできるだけ利用するため、まずは真東に打上げる。この際LAに沿ってロケットの第0段（固体補助ロケット）と第1、第2段を順次燃焼させてから切放し、第2段のエンジン停止点Aを近地点とする長円軌道ABCに第3段を打上げる。この長円軌道が赤道面を北から南へよぎる降交点Bの高度は約148kmにとられ、その軌道傾斜角は打上げ場の緯度にほぼ等しく、約28.6度である。この軌道が遠地点近くで赤道面を南から北へよぎる昇交点をCとすると、BC間は南半球上にある。第3段がC点に達するとロケットをほぼ水平（わずかに上向き）の状態で第3段の燃料の約70%を燃焼させる。このときC点の高度は約574km、増速量は遠地点Dの高度がほぼ静止軌道の高度35787kmになりかつ軌道傾斜角が少し減少して26.36度となるように選ばれる。すなわち長円BCとCDは同じ平面内にはなく、C点でのガスの噴射方向はほぼ長円B

Cに接する赤道面方向に向けられる。長円CDの遠地点でかつ降交点であるD点で、再び水平の状態で第3段に点火し、残りの30%を燃焼させて第3段と衛星を静止軌道に投入する。静止軌道は傾斜角が零でその周期が地球の自転周期 $23^h56^m04^s$ に等しい円軌道だから、D点での増速の速度は長円CDに接し、東北方向を向き、長円軌道CDのD点の速度との合成速度の方向が赤道面内にありかつ水平でその大きさが静止衛星の速度3.074757km/s（29参照）となるように選ばれる。以上のロケットの姿勢変更・点火・分離などは総てロケットに搭載されている慣性誘導装置で自動的に行なわれるようになっているが、地上からの電波誘導で変更することも可能である。

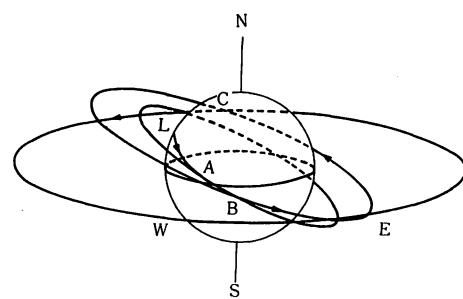
打上げ地点Lから静止地点Dまで達するのに要する時間は約6.6時間（LBが0^h.4, BCが0^h.9, CDが5^h.3）で、その間に地球は約99度西から東の方へ自転する。LB間の角距離は、もし真東に打上げ方向を変えなければ、慣性系にたいして90度（地球の自転のため経度差は84度）となるが、実際はロケットが濃い大気中を飛ぶ時間を短縮するため東から3度南よりの方向に打上げる。こうすると地球自転速度の軌道面方向の成分は0.14%しか減少しないが（ $\cos 3^\circ = 0.9986$ ），LB間の角距離は5%減少した85.5度にできる。A点での第2段の増速方向は長円AB面内にはおかず少し赤道面に近づける。またBCDの角距離は360度だから、地球が99度自転する間に、ロケットは地球を一周と85.5度回ることになり、D点は打上げ場の約13.5度西となる。打上げ場は西経80.5度だから、衛星は西経94度に静止することになる。衛星をもっと東に静止させたいときは、D点を少し低くしE点を静止高度として最終軌道の平均高度を静止軌道の値よりも少し低くする。こうすると1kmにつき0.051分周期は短くなり、毎日0.013度東へ移動するから、希望する経度のところに遠地点Eがきたとき静止軌道に変換すればよい。逆に西に静止させたいときは、D点を少し高くしE点を静止高度として最終軌道の平均高度を少し高くなる。こうすると1kmにつき毎日0.013度西へ移動するから、希望する経度のところに近地点Eがきたとき静止軌道に変換すればよい。これらの方法は下記の(2)と(3)の場合と同じである。

(2) 中緯度地方から全段慣性誘導の3段式ロケットとアポジ・モータを用いて静止衛星を打上げる場合
タイタン3Cでアポジ・モータ付きの静止衛星をフロリダから打上げる場合は下記のようになる。
タイタン3Cはアポジ・モータ（通常衛星に組込まれた固体燃料のロケット）を用いると、約1.7tonの衛星（アポジ・モータのケースの質量を含む）を静止軌道に

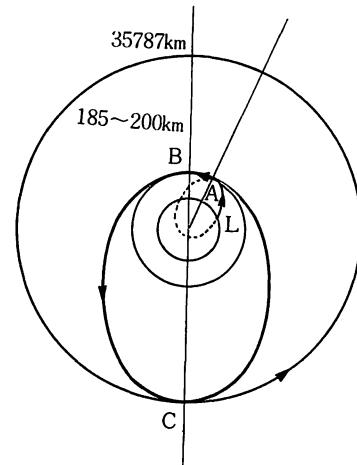
打上げることができる。タイタン3Cの打上げ時の総質量は約635tonであるから、アポジ・モータの付加と衛星の質量の増加(約1ton)による打上げ時の総重量の増加は約0.2%にすぎない。このため質量の増加による第5~6図のLAとABCの軌道の変化はほとんどない。しかし第3段からは負荷の増加の影響が大きくなるため、C点で第3段の燃料のほとんど全部を燃焼する。D点でアポジ・モータが水平かつ東北を向き、60rpm程度で回転した状態になるように、CD間で第3段で姿勢制御しスピンドルアップしてから第3段を分離する。アポジ・モータがD点に達したときこれに点火し衛星を静止軌道に入れる。

(3) 中緯度地方から第3段が無誘導の3段式ロケットとアポジ・モータを用いて静止衛星を打上げる場合

この場合はINTELSAT I~IV号系やATS 1, 3, 5と同じような方式がとられる。まず第7, 8図のL点からほぼ真東に打上げ、LAに沿って第1段(補助ブースタを含む)を燃焼分離し、ひきつづき第2段を燃焼させ、A点でこれを円軌道ABに入れる。円軌道ABの高度は185~200km、軌道傾斜角は打上げ場の緯度の絶対値にほぼ等しい。打上げ場が北半球にある場合は、円軌道ABと赤道面の交点が降交点Bとなる。第3段がBに達したときに水平になるようにABの間で第2段の姿勢制御装置でこれを姿勢制御し60~120 rpmで自転させてから第2段を第3段から分離する。第3段がB点に達したときにこれに点火し、長円軌道BCに入る。第3段の推力は、遠地点でかつ昇交点であるCが丁度静止軌道の高度に一致するようにする。この際その推力に余裕があれば長円軌道BCの傾斜角を可能なかぎり小さくする。すなわちB点でのロケットの方向は水平でその推力の余裕に応じて東から北の方向に向けられる。BC間で第3段を衛星(アポジ・モータを含む)から分離する。衛星が慣性誘導装置を持っていないときは、BC間で電波誘導し、C点で自転軸は水平かつ軌道傾斜角が零になるように南東に向けられる。C点に達するまでに姿勢制御が終わる、C点で衛星を静止軌道に投入してもよいときは、そのアポジ・モータに点火し静止衛星とする。もし最初にC点に達したとき点火しなければ、長円BCを一周した約10.6時間後に、または何周かした10.6時間の整数倍の時間後に点火する。近地点Bの高度が185~200kmにとってあるのは、近地点は低いほど打上げ効率はよいが(第4章の④参照)、あまり低いと近地点付近での空気抵抗のため、近地点通過時の長円軌道BCの変化が大きくなり、2回目以降の遠地点で静止軌道に投入するのが困難となるのと、遠地点での軌道変換の効率がおちるためである(第4章の③参照)。LAの飛しょう時間が



第7図 最終段が無誘導の3段式ロケットによる静止衛星の打上げ軌道

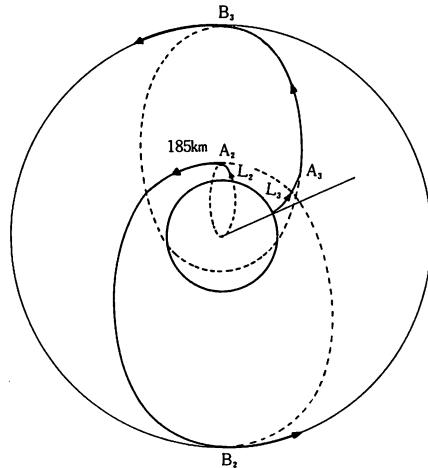


第9図 最終段が無誘導の3段式ロケットによる静止衛星の打上げ軌道

約 $0^{\text{h}}.13$ 、ABが $0^{\text{h}}.28$ 、BCが $5^{\text{h}}.29$ だから、打上げ開始から最初にC点に達するまでの時間は約5.7時間となり、その間に衛星は慣性系にたいして約270度公転する。一方地球は5.7時間に86度自転するから、最初のC点C₁はLの約184度東となり、2回目に到達する遠地点をC₂とすると、C₂はLの約25度東となる。点C₂に静止させるときは、衛星は静止させる前に打上げ場Lから長時間見えるため、打上げ場の誘導設備が利用でき、また静止後は打上げ場で直ちに衛星を使用できる利点がある。

(4) 全段誘導の2段式で低中高度衛星を打上げる場合

第9図のL₂A₂に沿って第1段(補助ブースタを含む)を燃焼分離させ、ひきつづき第2段の燃料の大部分も燃焼させて、これを長円軌道A₂B₂にのせる。第2段が遠地点B₂に達したとき水平になるように、A₂B₂間で姿勢制御し、B₂に達したなら第2段を水平の状態でその残りの燃料を燃焼し、高度がB₂の円軌道またはB₂を近地点とする長円軌道に入れる。第2段のエンジン停止



第9図 低中高度衛星の打上げ軌道

L₂～B₂：全段誘導の2段式ロケットによる場合L₃～B₃：最終段が無誘導の3段式ロケットによる場合

後、第2段の姿勢制御装置で衛星を希望の方向に向け、必要ならば自転させてから第2段を衛星から分離する。
 (5) 最終段が無誘導の3段式で低中高度衛星を打上げる場合

第9図のL₃A₃に沿って第1段(補助ブースタを含む)を燃焼・分離し、ひきつづき第2段も燃焼させてこれを長円軌道A₃B₃にのせる。第3段が遠地点B₃に達したとき水平になるようにA₃B₃の間で第2段で姿勢制御し、60～120 rpmで自転させてから第2段を第3段から分離する。第3段が遠地点B₃に達したならばこれを水平で自転した状態で燃焼させ、高度がB₃の円軌道またはB₃を近地点とする長円軌道に入れる。第3段の燃焼終了後第3段を衛星から分離する。このときの衛星の姿勢と自転数は、衛星が姿勢制御装置を持たないならば、第2段がスピノアップを開始したときの姿勢とその最終スピノアップ数にはほぼ等しい。

(1)～(5)の打上げ方式を比較すると、第1段と第2段の性能がほぼ同じならば、一般に(1)よりも(2), (2)よりも(3), (4)よりも(5)の方式の方が質量の大きい衛星を打上げることができる。しかし(1)や(4)の方式では、誘導装置をもったかなり質量の大きなロケットの最終段(たとえば(4)の方式に用いられる代表的なロケットThor Deltaの第2段の燃焼後の質量でも約1 ton)も最終軌道に入る

のにたいし、(2), (3)の方式ではロケットのどの部分も最終軌道には入らず、(5)の方式では最終段ロケットの燃焼後の固体燃料のケースしか最終軌道に入らず、その質量は比較的小さいため(Thor Deltaの第3段の燃焼後の質量は約80kg)、最終軌道に投入される全質量を比較すると(3)や(2)よりも(1), (5)よりも(4)の方式の方がはるかに大きくなる。最終軌道の精度は(3)よりも(2), (2)よりも(1), (5)よりも(4)の方式の方がよくなる。また(2), (3), (5)の方式では、軌道投入時の衛星の姿勢、自転数の変更は衛星単独で行なわなければならない。特に(3)の方式では、衛星も誘導装置を持たねばならず、その方式が電波誘導ならば、地上設備の建設・保守・運営費が(1), (2)の方式よりもかかる。また(2), (3), (5)の方式では、打上げ途中で高速回転するため、衛星の形状・構造にたいする制限が強い。特に(2)と(3)の方式では小型ロケット(アポジ・モータ)を衛星が持たねばならないため、それらの制約は非常に強いものとなる。(1)と(3)の方式で打上げられる衛星を比較すると、(3)による衛星は、アポジ・モータ、誘導装置など静止軌道への投入のためだけに使用される部分がかなりあるため、静止衛星としての機能が同じなら(1)による衛星よりも質量は大きく、高価となる。上記の事項を要約すると第1表のようになる。

第1表 人工衛星の打上げ方式

| 衛星の軌道 | 静止軌道 | | 低中高度軌道 | | |
|----------------------|-------|-------|------------|-------|------------|
| | 全段誘導無 | 全段誘導有 | 最終段スピノン安定有 | 全段誘導無 | 最終段スピノン安定無 |
| ロケットの誘導方式 | 可 | 不可 | 不可 | 可 | 不可 |
| アポジ・モータの有無 | 不要 | 不要 | 必要 | 不要 | 不要 |
| 衛星の質量 | 小 | 中 | 大 | 小 | 大 |
| 衛星の形状・構造にたいする制約 | 小 | 中 | 大 | 小 | 中 |
| 衛星の誘導装置 | 不要 | 不要 | 必要 | 不要 | 不要 |
| 衛星の価格 | 低 | 中 | 高 | 一 | 一 |
| 軌道投入時のロケットによる衛星の姿勢制御 | 可 | 不可 | 不可 | 可 | 不可 |
| 軌道投入誤差 | 小 | 中 | 大 | 小 | 中 |
| 打上げ支援費用 | 小 | 小 | 大 | 小 | 中 |
| ロケットの最終段の再点火 | 必要 | 不要 | 不要 | 必要 | 不要 |
| 最終軌道上の衛星とロケットの質量の和 | 大 | 小 | 中 | 大 | 小 |