

IV-1. VLBI による静止衛星の軌道決定

川瀬成一郎* 田中 高史*

ORBIT DETERMINATION OF GEOSYNCHRONOUS SATELLITES BY THE VLBI TECHNIQUE

By

Seiichiro KAWASE and Takashi TANAKA

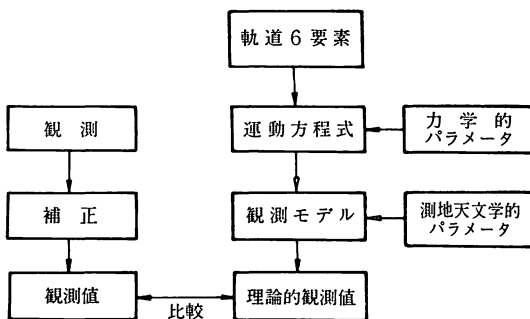
1. 序 論

古典力学の世界においては、3次元空間での質点の運動は自由度6であり、したがって、ある時刻における位置速度を与えると、その質点の運動は、未来永劫にわたり決定されてしまう。衛星の運動は現在のところ、古典力学に従うものと信じられており、したがって、6個のパラメータにより、その運動が決定される。この6個のパラメータとして、何を選ぶかは自由であるが、一般に用いられているものは、ケプラの6要素といわれるものであり、別名、接触軌道要素 (osculating orbital elements) とも呼ばれている。もちろん、ケプラの6要素の代わりに、ある時刻における衛星の位置速度を与えてもよく、両者は全く等価である。また、これら軌道を決定する6個のパラメータ、すなわち軌道要素が準拠する時刻をエレメントエポックと呼ぶ。そして、この6個の軌道要素を求める作業を軌道決定と呼んでいる。力学的には、軌道要素として、位置速度を与えることが一番簡潔であろう。しかしながら、人間の感覚に訴えるという点ではケプラの6要素が優れている。また、ケプラの6要素とは別に、平均軌道要素といわれる表現法もあるが、

これは、力学における摂動理論と結び付いたものである。

さて、どの表現法かは別にして、衛星の軌道要素を求める方法すなわち、軌道決定の方法とはどのようなものであろうか。まず、第1図を参照されたい。我々が、主に地球上から衛星を観測した場合、観測量と軌道要素がどう結び付いているかを考えたものが、第1図である。もしも、ある軌道要素が仮定されたとすれば、運動方程式の初期条件が決まり、任意の時刻での慣性空間座標が算出できる。ただ、このとき、この力学システムを決定するパラメータ、例えば月、太陽の位置、万有引力定数等がわかっていなければならない。現在の物理学、天文学的知識によれば、衛星の運動に関与するであろう力学的パラメータは、ある程度よく知られており、それらを、第1表に示す。次に、慣性空間座標から観測値を計算するわけであるが、たいていの場合、我々が衛星を観測して得られる量は慣性空間に準拠したものではなく、地球と一諸に運動する座標系に準拠したものであるから、観測には慣性空間と、地球固定座標系との相対関係、地球固定座標系上での観測者の位置が関与してくる。したがって、観測のプロセスにおいては、天文測地的パラメータが数多く介入してくる。これらを、第2表に示す。このようにして得られた観測値に対する理論値が、もしも実際の観測値に一致したとすると、我々ははじめに仮定した軌道要素を、実際の衛星の軌道要素とみなすわけである。このときの観測値とは、実際の観測値に大気電離層の屈折、バイアス等の各種補正を加えた後のものを考える。実際の軌道決定では、逆に観測値が一致するような軌道要素を探すという、一種の推定問題を解くことになる。

観測の種類、方法に関しては数多くのものが考えられる。それらを、第3表に示した。この中で、現在最も多く用いられているものは、レンジ/レンジレート方式であるが、どの観測が優れているかはハードウェアの実現



第1図 軌道決定の原理

*鹿島支所 衛星管制課

第1表 力学的パラメータ

万有引力定数
地球の質量
地球ポテンシャルの偏りによる摂動力
展開係数の ZONAL 成分
展開係数の NON-ZONAL 成分
太陽引力による摂動力
太陽の質量
太陽の位置
月引力による摂動力
月の質量
月の位置
太陽輻射圧による摂動力
太陽光フラックス
衛星受光面積
衛星表面反射率
大気 drag による摂動力
超高層大気密度の分布
衛星断面積
drag の係数

第2表 天文測地学的パラメータ

地球と慣性空間の相対関係に関するもの
プリセッション
ニューテーション
UT1
ポーラーモーション
地球固定座標系上での地上局の位置に関するもの
地球赤道半径
地球偏平率
地上局の緯度経度高度

第3表 観測値の種類

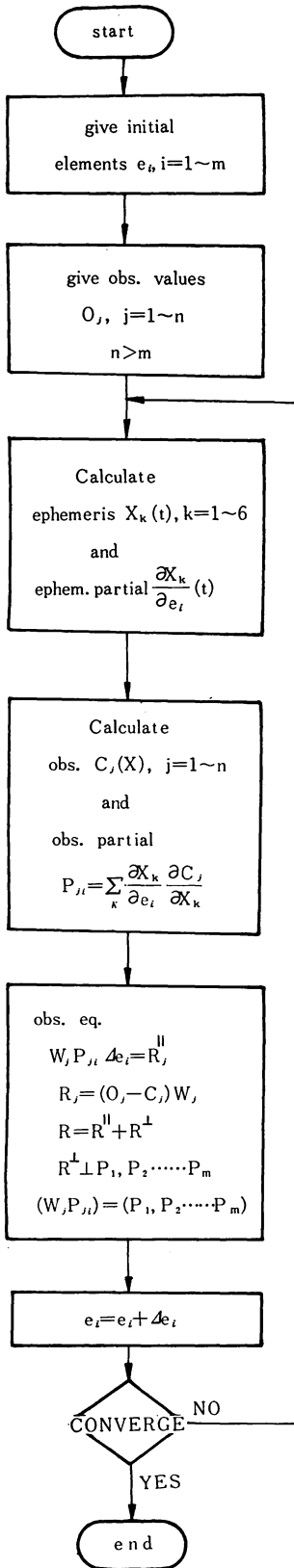
レンジ	(距離)
レンジレート	(距離変化率)
A_z	(方位角)
E_l	(仰角)
ミニトラック 干渉計	(2局からの距離差)
VLBI	(かなり離れた2局からの距離差)
ドップラ	(距離変化率)
光学観測	(赤経, 赤緯)

性, 得られるデータの精度, 推定問題を解く際の軌道要素に対する観測性の良し悪しなどによって決まる。本論文では, 鹿島支所で開発した軌道決定プログラム KODS の概要を述べるとともに, VLBI データを観測値とした場合の軌道決定について, 観測性の問題, 実際のデータを用いて軌道決定を行った例を中心に報告したい。

なお, 本論文では述べないが, 軌道決定には別の応用の可能性もある。第1図において, 力学的パラメータ, 天文測地学的パラメータというものを示したが, このうちの一つ例えば地上局位置を少しずらしたとしよう。そうすれば, 当然観測値の計算値も変化するが, このとき, 前よりも一層良く計算値が観測値に一致したとすれば, 我々は地上局のより正確な位置を知ったことになる。このように, 軌道決定を測地学天文学の領域に拡張することは今後の研究課題となろう。ただし, 衛星を単なるターゲットとみなす方法と, ここで述べたような軌道運動を考慮してゆく方法とは区別して考えるべきである。

2. 軌道決定プログラムの概要

前節において, 軌道決定のあら筋につき述べたが, それでは, 実際の軌道決定プログラムはどのような構成になっており, どのような点に問題があるのであろうか。第2図に, 軌道決定プログラムをもう少し具体的に定式化したときのフローを示した。KODS も, ほぼ, この構成にのっとっている⁽¹⁾。軌道決定を行うには, まず, 未知の軌道要素と近い値を持つ初期推定軌道要素がわかっていなくてはならない。第2図に示すごとく, この初期推定軌道要素を逐次改良してゆき, 真の軌道要素を求めるわけであるが, このプロセスを微分修正法 (differential correction) と呼んでいる。初期推定軌道要素を改良するには, まず, 初期推定軌道要素を用いて軌道計算を行い, 更に, この軌道から予測される観測値を計算し, これから, 実際の観測値とのずれ, すなわち, 観測残差を求める。そして最小自乗法により, この観測残差を少なくする方向に初期推定軌道要素を修正するわけであるが, そのためには, 第2図で観測値パーシャルといわれる量が必要である。第2図及び上記の説明でわかるように, これら観測値と観測値パーシャルの計算はエフェメリス, エフェメリスパーシャルを計算するプロセスと, それから, 更に観測値, 観測値パーシャルを計算するプロセスに分けられ, 前者は, 運動方程式の積分という操作を必要とする。この運動方程式を積分する操作が, 軌道決定プログラムの中心の問題点であろう。



第2図
軌道決定プログラム
の概要

運動方程式の積分には大別して解析積分による方法と、数値積分による方法の二つがある。いずれにせよ、前節第1表に示した各種摂動力の効果が正確に計算されなければならないが、解析積分では、すべて十分とはいかず、一般的には数値積分が多用されている。しかしながら、低軌道衛星では解析積分も用いられているようである。解析積分、数値積分の実際に関しては、他を参照して頂くことにして、我々の製作した軌道決定プログラムKODSでは、両者の利点を組み合わせた中間的方法が採用されており、以下にその概略を述べる⁽²⁾。

衛星の位置、速度に対する運動方程式は、

$$\dot{X} = V, \quad \dot{V} = F_0(X) + F_1(X). \quad \cdots(1)$$

ここで、 X は衛星の位置ベクトルであり、 V は衛星の速度ベクトルである。そして $F_0(X)$ は、

$$F_0(X) = -\frac{\mu X}{r^3}, \quad r = |X| \quad \cdots(2)$$

であり、 μ は地球の重力定数である。 F_1 は衛星に作用する摂動力を表し、ここでは、静止軌道だけを考慮して V には依存しないものとする。次に、我々は X と V を次のように分け、

$$X = X_0 + X_1, \quad V = V_0 + V_1. \quad \cdots(3)$$

これらを(1)に代入して、次の式を得る。すなわち、

$$\dot{X}_0 + \dot{X}_1 = V_0 + V_1 \quad \cdots(4)$$

及び

$$\dot{V}_0 + \dot{V}_1 = F_0(X_0 + X_1) + F_1(X_0 + X_1). \quad \cdots(5)$$

方程式(5)は変型され、

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 + \dot{V}_1 &= F_0(X_0) - F_0(X_0) \\ &\quad + F_0(X_0 + X_1) + F_1(X_0 + X_1). \end{aligned} \quad \cdots(6)$$

となり、方程式(4)と(6)より、

$$\dot{X}_0 = V_0, \quad \dot{V}_0 = F_0(X_0) \quad \cdots(7)$$

及び

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= V_1, \quad \dot{V}_1 = F_0(X_0 + X_1) \\ &\quad - F_0(X_0) + F_1(X_0 + X_1) \end{aligned} \quad \cdots(8)$$

が成立する。式(7)は解析的に容易に解くことができ、我々は V_0 と V_0 を知れば(8)式を X_1 と V_1 に関する方程式として解くことができる。(8)式はプレディクタ、コレクタ法で解けばよい。以上述べた方法は、(1)式を直接積分する方法に比べ、数々の利点をもっている。(1)式を直接積分するときと比べ、プレディクタ、コレクタが簡単なもので済み、しかも、プレディクタ、コレクタ計算は単精度でよく、更に(8)式に適当な初期条件を与えればパーソナルも同時に計算できる。プレディクタ、コレクタの具体的な形にはいろいろあろうが、我々がKODSで用いたもののプレディクタは、

$$X_{p, i+\frac{1}{2}} = X_{1, i} + \frac{Dt}{2} V_{1, i} + \frac{Dt^2}{8} (f_{1, i} + f_{2, i}) \cdots \cdots (9)$$

及び

$$X_{p, i+1} = X_{1, i} + Dt \cdot V_{1, i} + \frac{Dt^2}{2} (f_{1, i} + f_{2, i}) \cdots \cdots (10)$$

であり、コレクタは、

$$X_{c, i+\frac{1}{2}} = X_{1, i} + \frac{Dt}{2} V_{1, i} + \frac{Dt^2}{96} \{ 7(f_{1, i} + f_{2, i}) + 6(f_{p, i+\frac{1}{2}} + f_{p, i+\frac{1}{2}}) - (f_{p, i+1} + f_{p, i+1}) \} \cdots \cdots (11)$$

及び

$$X_{c, i+1} = X_{1, i} + Dt V_{1, i} + \frac{Dt^2}{6} \{ (f_{1, i} + f_{2, i}) + 2(f_{p, i+\frac{1}{2}} + f_{p, i+\frac{1}{2}}) \} \cdots \cdots (12)$$

である。ここで、

$$X_{1, i} = X_1(Dt \cdot i + t_0)$$

$$V_{1, i} = V_1(Dt \cdot i + t_0)$$

$$t_0 \quad \text{積分開始時間}$$

$$Dt \quad \text{積分タイムステップ}$$

$$f_{p, i+1} = F_0(X_0, i+1 + X_{p, i+1}) - F_0(X_0, i+1)$$

$$f_{p, i+1} = F_1(X_0, i+1 + X_{p, i+1})$$

などである。サフィックス p は、プレディクタによって得られる値を示し、 c はコレクタによって得られる値を示す。(11)と(12)式の右辺は、 p を c に換え再び計算され、このプロセスが、ある精度が得られるまで続けられることになる。 $X_{1, i+\frac{1}{2}}$ と $V_{1, i+\frac{1}{2}}$ がわかれば $V_{1, i+1}$ は、

$$V_{1, i+1} = V_{1, i} + \frac{Dt}{6} \{ (f_{1, i} + f_{2, i}) + 4(f_{1, i+\frac{1}{2}} + f_{2, i+\frac{1}{2}}) + (f_{1, i+1} + f_{2, i+1}) \} \cdots \cdots (13)$$

と求められる。このように、KODSで用いたプレディクタ、コレクタは非常に簡単なものであり、かつ、スタータを必要としないという利点を持っている。更に、KODSにおける積分法では、次のような近似を用いている。すなわち、 $X_{p, i+\frac{1}{2}}$ と $X_{c, i+\frac{1}{2}}$ の差及び $X_{p, i+1}$ と $X_{c, i+1}$ の差は小さいので、

$$f_{c, i+\frac{1}{2}} = f_{p, i+\frac{1}{2}} \cdots \cdots (14)$$

及び

$$f_{c, i+1} = f_{p, i+1} \cdots \cdots (15)$$

とする。この近似を用いることにより、摂動力計算の回数が減り、KODSの積分は大幅にスピードアップされる。以上述べた数々の特徴により、KODSの積分は非常に高速であり、かつ、プログラムはコンパクトとなっており、しかも精度もよい。

次に、観測値、観測値パーシャルの計算であるが、この過程には時間積分は含まれておらず、主に座標変換計算を行なえばよいが、その際、前節で述べたように、地球局と慣性空間の相対的位置を正確に計算せねばならない。

このようにして観測残差、観測値パーシャルを計算すると、これらから最小自乗推定法に従い、推定軌道要素の修正量を計算できる。以下、KODSにおける修正量の求め方を述べるが、このプロセスにおいて、システムの観測性の概念が重要であり、KODSにおいては、この観測性をチェックしながら推定が続けられるのが特徴である。第2図中の記号を用いると、残差ベクトル R 、観測値パーシャル行列 P 及び重み付行列 W から、

$$P^T W^2 (R - P \Delta e) = 0 \cdots \cdots (16)$$

より軌道要素の修正量が求められる。このことは、行列 WP の列ベクトルを $P_1 \cdots P_n$ とすると、

$$P_1 \cdots P_n \perp WR - WP \Delta e$$

となることを示す。すなわち、 $P_1 \cdots P_n$ の張る部分空間への WR の写影成分を WR'' とすると、

$$WP \Delta e = WR'' \cdots \cdots (17)$$

の解として Δe が求まることを示す。この計算を行うためベクトル $P_1 \cdots P_n$ を、次のように、シュミット直交化の方法により正規直交基底 $q_1 \cdots q_n$ に変換する。

$$q_i = q_i' / \|q_i'\|, \quad q_1' = P_1,$$

$$q_i' = P_i - \sum_{j=1}^{i-1} (P_i \cdot q_j) q_j, \quad i=1 \cdots n. \cdots \cdots (18)$$

行列で書くと、

$$WP = QA^T, \quad Q = (q_1 \cdots q_n),$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = (P_i \cdot q_j), \quad i > j,$$

$$= 0, \quad i < j,$$

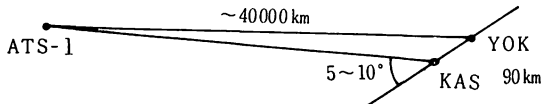
$$= \|q_i'\|, \quad i = j \cdots \cdots (19)$$

となり、(17)式は、

$$QA^T \Delta e = WR'' \cdots \cdots (20)$$

第4表 KODS の仕様

推定パラメータ	(1)epoch における衛星の位置速度 (2)epoch におけるケプラーの6要素 (3)各観測値のバイアス
入力データ	(1)レンジ (2)レンジレート (3)方位角 (4)仰角 (5)VLBI データ
局の数	2局まで
エレメント入出力座標系	epoch true sidereal system
推定方式	位相空間正規直交系展開 (同時に縮退の予測を行う)
積分法 摂動力	中間積分法(数値積分と解析積分の併用) (1)15次までの地球ポテンシャル高次項 (2)月の引力 (3)太陽の引力 (4)太陽輻射圧
積分座標系	epoch true sidereal system
積分時系	UTC
partial 積分法	中間積分法の応用による数値計算 (XYZ座標系で積分)



第4図 観測のコンフィギュレーション

であった。今、各観測局と衛星を結ぶ3角形を、赤道面に投影すると第4図が与えられるが、この状態でレンジ差が6 m 変化したとすれば、それによる軌道上での誤差は、 $0.006 \text{ km} \times 40000 \text{ km} / 90 \text{ km} / \sin 7^\circ \approx 21 \text{ km}$ と予想される。したがって、決定値に第6表のような誤差がみられるのは、観測データの精度上やむを得ないことであろう。

KODSにおいては、パーシャル演算は単精度で行っている。使用した計算機 MELCOM 7700 は、単精度のけた数が7けたであるから、各推定パラメータに対する $\log_{10} f_i^2$ の限界値は-7である⁽⁹⁾。一方、第6表の結果から、すべてのパラメータについて、分離性の指標に、なお2けたの余裕があるので、推定演算における可観測性 (Observability)⁽⁹⁾ は十分である。

したがって、軌道決定精度を上げるためには、今回に比べて、個々のデータのもつばらつきを小さくする必要がある。今回観測した ATS-1 衛星は、両局からの仰角が $2^\circ \sim 11^\circ$ と低かったため、シンチレーションによるばらつきがかなり大きく、また、このような低仰角では、屈折の補正を完全に行うことは困難となり、これが残差を大きくした原因と考えられる。

また、別の面からみれば、今回の実験では、基線長が 121 km であり、Very Long なる主旨に必ずしも沿ったものとはいえない。干渉計の性質から、データの分散が同一でも、基線長が大きければその影響は小さく抑られるであろう。

ただし、注目すべきこととして、今回の実験では、基線の方向が期せずして赤道面に対し、ほぼ 45° となっていた。第6表において各パラメータに対する可観測性がそろって良いのは、この事実に基づくものであり、将来の実験のために、貴重な経験を得たといえる。なお、基線の赤面に対する角度と、可観測性との関係については更に計算を進めており、後日発表したい。

4. 計算機シミュレーションによる検討及び結論

今回の VLBI 軌道決定実験は、その可能性の検討及び問題点の明確化を目指したものであり、一応、その目的は果たされたといえよう。

まず、VLBI データによる軌道決定プログラムにつ

いては、その元となった軌道決定プログラム KODS が、非常コンパクトで扱いやすいものであったため、容易 VLBI にバージョンに変更することができた。

次に、観測データは、その分散が多少大きく出ていることが、軌道決定の残差より明らかとなった。これについては、2局での相関時刻差 τ_0 を求める際の積分時間を大きくとること、及び低仰角によるシンチレーションの影響を受けないような観測を行うことが望ましい。

基線のとり方については、軌道の観測性の立場から見て、その方向は非常に良いことがわかった。しかし、その長さは可能な限り大きくするのが望ましい。

また、今回の実験では、観測した衛星及びそれに対する地上局の配置が限定されたが、干渉計の基本的性質から、各観測局と衛星間を結ぶ3角形が、2等辺3角形に近くなるような観測のコンフィギュレーションを選ぶことが感度の点から有効であろう。

現在、VLBI 軌道決定の計算機シミュレーションを、種々のケースについて続行中であるが、その1例として、本節で述べた点をすべて踏まえて観測を行ったときに得られるであろう精度を、今回のケースについてのシミュレーションと併せて、第7表に示した。衛星の軌道は ATS-1 と同じものを仮定し、毎時間1点ずつの24時間観測を想定した。ケース2では、観測局をそれぞれ Vancouver (Canada), Calgoolrie (Australia) 付近に置いてある。表の数字は、軌道決定の誤差を、衛星位置に注目して、それぞれバイアス誤差のみ、ランダム誤差のみ、ある場合について示したものである。

第7表 VLBI 軌道シミュレーション

衛星軌道	ATS-1, Epoch 1977. 1.31					
観測局(Case. 2)	Canada—Australia					
観測データ	1日/1時間ごと					
観測誤差	位置決定誤差 [m]					
	Case-1 (今回に同じ)			Case-2 (大陸間)		
	X	Y	Z	X	Y	Z
バイアス(4m)	900	2400	40	10	10	0
ランダムノイズ($\sigma=4\text{m}$)	7200	2200	2300	70	30	30

ケース1は、データ点のとり方を除いては今回の実験と同一条件であり、観測値のバイアス及びランダム誤差に、かなり敏感であることがわかる。一方、ケース2は大陸間に基線を取り、しかも、2等辺3角形に近いコンフィギュレーションとしたものである。それに伴ない、同一のバイアスあるいはランダム誤差のもとでも、その軌道決定への影響は2けたほど少なくなっている。しかも、このコンフィギュレーションにおいて、観測期間を

