

V-3. バンド幅合成法による高精度 VLBI 方式

川口 則幸* 河野 宣之*

BANDWIDTH SYNTHESIS TECHNIQUES FOR PRECISE DELAY MEASUREMENT IN VLBI

By

Noriyuki KAWAGUCHI

Nobuyuki KAWANO

1. ま え が き

VLBIにおける2局間の遅延時間は、相関をとるビデオ信号の帯域幅を広くとればとるほど、その決定精度はよくなる。しかしビデオレコーダによる方式(本特集号II-3.(3)及びV-2.参照)でも、リアルタイム相関方式(V-4.参照)でも、その記録容量や計算機の実時間処理速度に限界があるため、従来の1チャンネル方式(第II部VLBIの国内基礎実験システム参照)ではおのずから限界がある。そこで考えられたのが、超広帯域のビデオ信号を数チャンネルに間引いて相関をとり、それを合成して等価的に広帯域化を実現するバンド幅合成の手法⁽¹⁾である。我々は、このバンド幅合成の手法を用いて、遅延時間の決定精度を、現在の±5nsecから±0.1nsecまでと、飛躍的に増大しようとしている。ここでは、このバンド幅合成の手法及び実際に実現するにあたっての種々の問題点について触れる。

2. 相互相関関数と相互電力スペクトル

相関をとろうとする2局のRF信号、 $x(t)$ 、 $y(t)$ は、到来する電波の到達差 τ_g (幾何学的遅延時間; geometric time delay)により、

$$y(t) = x(t - \tau_g) \quad \dots\dots(1)$$

となる。したがって、各フーリエ変換 $x(\omega)$ 、 $y(\omega)$ は(1)式より、

$$y(\omega) = x(\omega) \exp(-j\omega\tau_g) \quad \dots\dots(2)$$

の関係を持つ。ビデオ信号のスペクトルは、2局のローカル周波数及び位相を、それぞれ ω_x 、 ω_y 、 ϕ_x 、 ϕ_y とすると、

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= x(\omega + \omega_x) \exp(-j\phi_x) \\ Y(\omega) &= y(\omega + \omega_y) \exp(-j\phi_y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3)$$

と書ける。したがって、ビデオ帯における相互電力スペクトルは、(2)、(3)式より、

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= X(\omega) Y^*(\omega) \\ &= x(\omega') x^*(\omega' + \omega_y - \omega_x) \exp(j\omega' \tau_g + \phi_y - \phi_x), \quad \dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + \omega^0 : \text{RF 周波数} \\ \omega^0 &= \omega_x \simeq \omega_y \quad \dots\dots(5) \end{aligned}$$

ω : ビデオ周波数

となる。ところが、

$$x^*(\omega' + \omega_y - \omega_x) = \int x(t) \exp[j(\omega_y - \omega_x)t] \cdot \exp(j\omega't) dt$$

だから、もし $\exp[j(\omega_y - \omega_x)t]$ が積分時間内でほぼ一定とみなせるならば、 $(\omega_y - \omega_x)$ が十分小: Quasi-time varying term)。これは積分の外にでて、

$$x^*(\omega' + \omega_y - \omega_x) = \exp[j(\omega_y - \omega_x)t] x^*(\omega') \quad \dots\dots(6)$$

となる。(5)、(6)式よりビデオ帯の相互電力スペクトルは、

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= S_{xx}(\omega') \exp[j(\theta + \omega' \tau_g)] \quad \dots\dots(7) \\ \theta &= (\omega_y - \omega_x)t + \phi_y - \phi_x \end{aligned}$$

$S_{xx}(\omega') = x(\omega') x^*(\omega')$: 信号のRFスペクトル

となる。ビデオ帯の相互相関関数は(7)式の逆フーリエ変換を行って、

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \\ &= 2 \cos(\theta + \omega^0 \tau_g) B_1(\tau + \tau_g) \\ &\quad - 2 \sin(\theta + \omega^0 \tau_g) B_2(\tau + \tau_g) \\ &= 2 |B(\tau')| \cos\{\theta + \omega^0 \tau_g + \arg B(\tau')\}, \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

*鹿島支所 第三宇宙通信研究室

$$B_1(\tau') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega') \cos \omega\tau' d\omega, \quad \dots\dots(9)$$

$$B_2(\tau') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega') \sin \omega\tau' d\omega, \quad \dots\dots(10)$$

$$B(\tau') = B_1(\tau') + j B_2(\tau'), \quad \dots\dots(11)$$

$\tau' = \tau + \tau_g$

arg X, |X| : 複素数 X の位相と振幅。

(8)式において $|B(\tau')|$ を fringe envelope, $\theta + \omega^0\tau_g$ を fringe phase, arg $B(\tau')$ をデイレイ fringe 周波数と呼ぶことにする。この(7)式若しくは(8)式から τ_g を決定するには, (i) (7)式より arg $S_{xy}(\omega)$ の ω に対する 1 次傾斜より τ_g を求める。(ii) fringe envelope より求める。の二つの方法が考えられるが, 一般に(i)の方式は幾つかのフレームにわたっての統計処理を行うことができるので(ii)の方法に比べて τ_g の決定精度は良くなる。また τ_g 中には 2 局間の時刻同期誤差, 局内 delay 誤差, 伝搬誤差等が含まれており, 真の τ_g を求めるにはこれらの項を補正しなければならない。これらの詳細については, 関連各章を参照されたい。

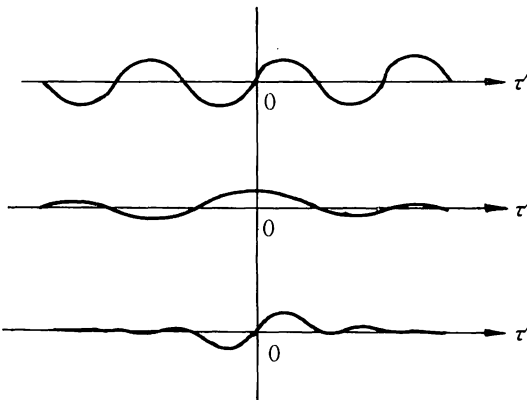
3. 1 チャンネル VLBI

ビデオ帯より, $0 \sim B$ Hz までのフラットノイズスペクトルを切り取って相関をとると, (9), (10) 式は,

$$S_{xx}(\omega') = 1; 0 < \omega < 2\pi B$$

$$= 0; \quad ,$$

より, $B_1(\tau') = \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi \tau'} \cos \pi B \tau',$



- (a) $\cos(\theta + \omega^0\tau_g + \pi B \tau')$
- (b) $2B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'}$
- (c) $R_{xy}(\tau)$

第 1 図 相互相関関数

$$B_2(\tau') = \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi \tau'} \sin \pi B \tau',$$

$$B(\tau') = B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'} \exp(j \pi B \tau')$$

となるから, 式(8)より相互相関関数は,

$$R_{xy}(\tau) = 2B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'} \cos(\theta + \omega^0\tau_g + \pi B \tau') \dots\dots(12)$$

となる。fringe phase $(\theta + \omega^0\tau_g)$ が 90° のときの $R_{xy}(\tau)$ を第 1 図(c)に, fringe 及び fringe envelope を同図(a), (b)に示す。(c)は(a)と(b)の積になっている。これより, fringe envelope による delay の決定では $\pm \frac{1}{B}$ (sec) がその決定精度の目安になることがわかる。

4. バンド幅合成

前記 3. の議論より, delay の決定精度を上げるためには, 相関をとるビデオ信号の帯域幅 B を大きくとればとるほどよくなることがわかった。ところが 1. で述べたように, これには上限がある。そこで第 2 図に示すように, 超広帯域なビデオ信号を, 幾つかに分割して相関をとり, それを合成するバンド幅合成の手法が考えられた。図に示すように, ビデオ信号のスタートを ω_k とすると, (9), (10) 式より, 第 k チャンネルにおける B_1, B_2 は,

$$B_1^k(\tau') = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_k}^\infty S_{xx}(\omega') \cos \omega\tau' d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{xx}(\omega') \cos(\omega + \omega_k)\tau' d\omega$$

$$= \cos \omega_k \tau' B_1(\tau') - \sin \omega_k \tau' B_2(\tau'), \quad \dots\dots(13)$$

$$B_2^k(\tau') = \sin \omega_k \tau' B_1(\tau') + \cos \omega_k \tau' B_2(\tau') \quad \dots\dots(14)$$

となる。(13), (14)式を(8)式に代入すると, 第 k チャンネルの相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は,

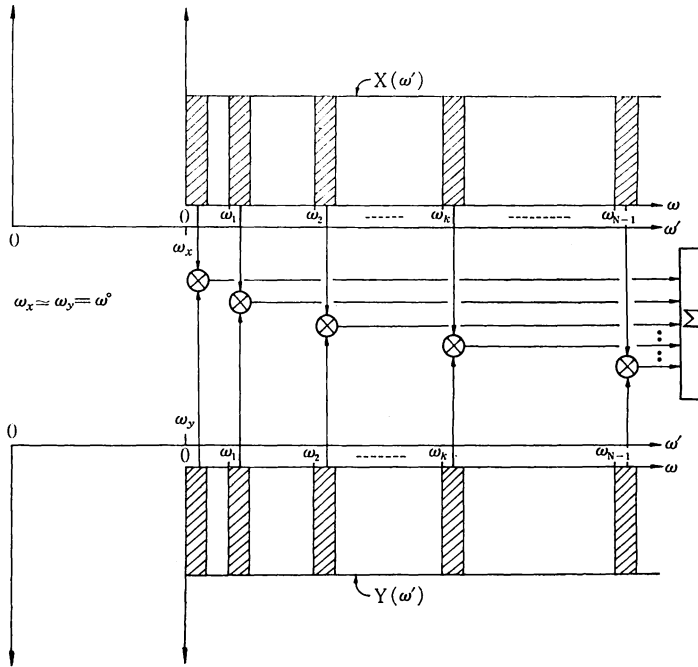
$$R_{xy}^k(\tau) = 2 \cos(\varphi_k + \omega^0\tau_g + \omega_k\tau') B_1(\tau') - 2 \sin(\varphi_k + \omega^0\tau_g + \omega_k\tau') B_2(\tau') \quad \dots\dots(15)$$

- $\varphi_k = \theta + \theta_k$: 第 k チャンネルのローカルの位相
- θ : チャンネル切換えでは変わらない 2 局の原発振器の位相差
- θ_k : チャンネル切換えによる位相誤差

となる。したがってバンド幅合成による合成された相互相関関数は, (15)式より, 次のように書ける。

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}^k(\tau)$$

$$= 2|D(\tau')| \cos[\theta + \omega^0\tau_g + \arg D(\tau')],$$



第2図 バンド幅合成

$$D(\tau') = \sum_{k=0}^{N-1} D_k(\tau') \quad \dots\dots(16)$$

$$D_k(\tau') = \exp [j(\omega_k \tau' + \theta_k)] [B_1(\tau') + j B_2(\tau')] \quad \dots\dots(17)$$

$$D_e(\tau') = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp (j \omega_k \tau') \right| \quad \dots\dots(20)$$

(17)式の $D(\tau')$ を複素遅延関数 (complex delay function) と呼び、式(16)から明らかのように、この絶対値が fringe envelope を、位相項が fringe phase とディレイ fringe 周波数を表していることがわかる。2. の(8)式と比較すると、1 回積分における $B(\tau')$ (9), (10), (11) 式と、 N 回積分合成による $D(\tau')$ が同じ役割もっていることがわかる。3. の場合と同様に、遅延の分解精度は fringe envelope の鋭さで決まることから、特に $|D(\tau')|$ を delay resolution 関数と呼び、バンド幅合成における遅延の決定精度を見極めるための重要な関数となっている。

5. チャンネル周波数の最適組合せ

3. と同様に、RFにおける信号のスペクトルをフラットであると仮定し、 $B_1(\tau')$ 、 $B_2(\tau')$ を(9)、(10)式より求め、チャンネル切換えによる位相誤差 θ_k を無視すると、(17)、(18)式より、delay resolution 関数は、

$$|D(\tau')| = B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'} D_e(\tau'), \quad \dots\dots(19)$$

となる。(19)式右辺第1項は、1チャンネル方式における resolution (第1図(b)参照) を、 $D_e(\tau')$ はバンド幅合成による delay resolution の改善効果を示している。(20)式で示される $D_e(\tau')$ は、リアレイアンテナのパワーパターンと等価であることから、delay resolution における最適周波数の組合せの問題は、アレイアンテナの指向性合成における最適空間周波数の組合せの問題に帰着する。アレイアンテナの指向性合成において、アレイの数が多い場合は統計的指向性合成⁽²⁾の方法が、少ない場合には、Minimum Redundancy Array Theory⁽³⁾がこの問題に適用される。統計的取扱いができるぐらい素子数を増やすということは、バンド幅合成においては、煩雑なローカル系を増やすことを意味し得策ではない。そこでここでは、Minimum Redundancy Array Theory によるバンド幅合成についてのみに触れる。

今、(20)式の ω_k が一つの基本周波数 ω_s からコヒーレントに作られるものとする、

$$\omega_k = N_k \omega_s, \quad k=0, \dots, N-1, \quad N_0 \equiv 0$$

となって(20)式は

$$D_e^2(\tau') = \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \exp (j N_k \omega_s \tau') \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \exp (-j N_k \omega_s \tau') \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos(N_k \omega_s \tau') \\
 &\quad + 2 \sum_{l=1}^{N-1} \cos(N_l \omega_s \tau') \\
 &= N + 2 \sum_{j=1}^M \cos(N_j \omega_s \tau'), \quad \dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

$$M = N-1 C_2 + N - 1$$

$$\max\{N_j\} = \max\{N_k\} = N_{max}$$

$\{N_k\}$: N 個のチャンネル周波数ナンバー

$\{N_l\}$: $\{N_k\}$ より作られる差集合 (beat set)

$$\{N_j\} = \{N_k\} \cup \{N_l\}.$$

式(21)及び文献(3)より、次の諸定理を導くことができる。

定理1 $D_e(\tau')$ は $2\pi/\omega_s$ の周期関数である。したがって、fringe envelope のイメージピークは $2\pi/\omega_s$ のところに現れ、これは ω_s を小さくすればとるほど遠ざけることができる。

イメージピークは、これを真の遅延のピークと誤認するおそれがあり、この間隔は予測される τ_g の予測精度より大きくなければならない。

定理2 (Zero Redundancy)

1 から N_{max} までの空間周波数を過不足なしに満たす $\{N_k\}$ は $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4, 6\}$ だけである。

第1表 Minimum Redundancy の配列

N	Nmay	R	配 列
5	9	1.11	0, 1, 4, 7, 9
6	13	1.16	0, 1, 6, 9, 11, 13
7	17	1.24	0, 1, 4, 10, 12, 15, 17
8	23	1.22	0, 1, 4, 10, 16, 18, 21, 29
9	29	1.24	0, 1, 4, 10, 16, 22, 24, 27, 29
10	36	1.25	0, 1, 3, 6, 13, 20, 27, 31, 35, 36
11	43	1.30	0, 1, 3, 6, 13, 20, 27, 34, 38, 42, 43

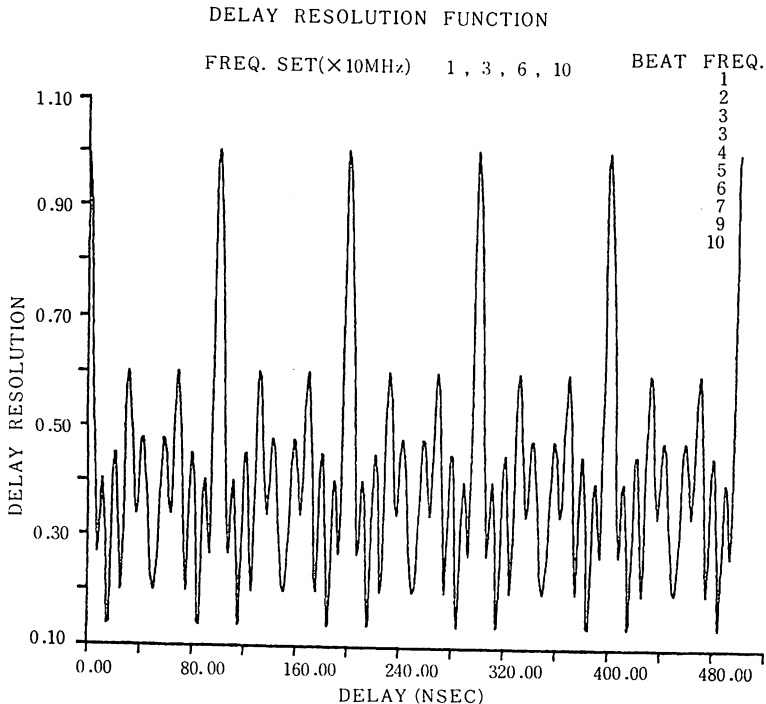
定理3 (Minimum Redundancy)

1 から N_{max} までの空間周波数を不足なしに満たし、最小の重畳をもつ $\{N_k\}$ は第1表による。

定理4 $D_e(\tau')$ は半周期のところに凹又は凸のピークをもつが、これは定理3によって重畳する周波数ナンバーの奇数が多いほどそのレベルは小さい。

定理5 $N_{max} \omega_s$ を大きくすればとるほど周期点でのピークは鋭くなる。

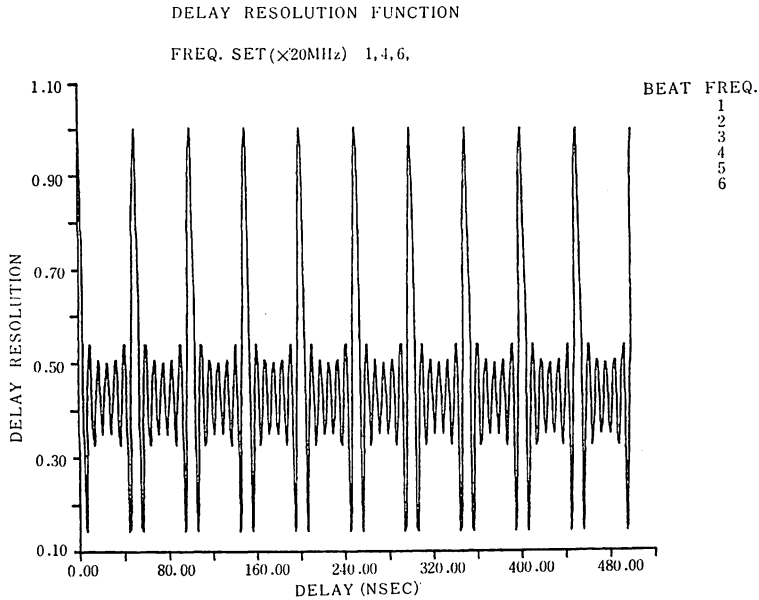
実際のバンド幅合成を行うにあたっては、以上の定理によって、その最適化を図る以外に、ハードウェアによ



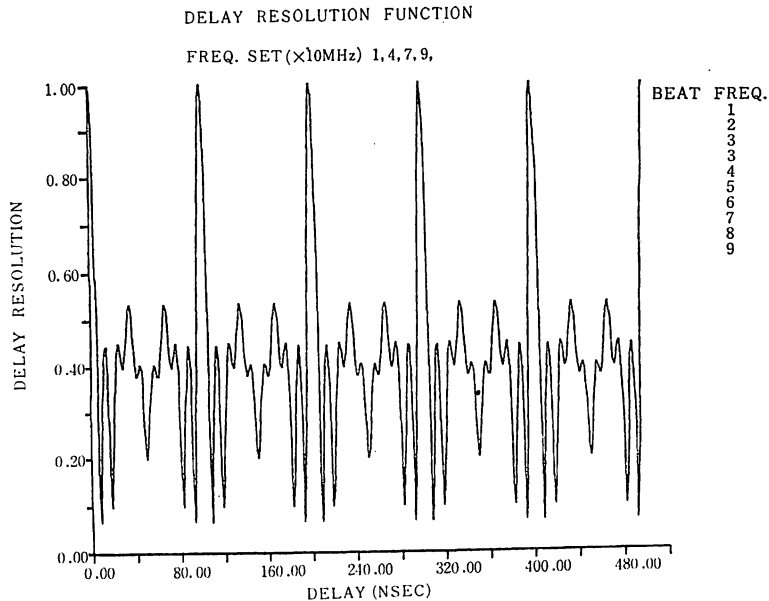
第3図 我々が行おうとしている5チャンネルバンド幅合成

る実現の難易度（特にローカル系の設計）を考慮しなければならぬ。以上の観点から、我々は $\{N_k\} = \{0, 1, 3, 6, 10\}$. $f_s = 10 \text{ MHz}$ ($f_s = \omega_s / 2\pi$), $B = 2 \text{ MHz}$ の 5 チャンネルバンド幅合成 V L B I を計画し、現在そのハードウェアの整備を行っている。第 3 図に、このときの $\{N_j\}$

(beat freq set) 及び $D_e(\tau')$ を示す。これを見ると、サイドローブやイメージピークを除けば、ほぼ、100MHz という超広帯域 V L B I と等価な delay resolution を示していることがわかる。横軸は $B = 2 \text{ MHz}$ 1 チャンネルの場合の resolution (500 n sec) をフルスケールに



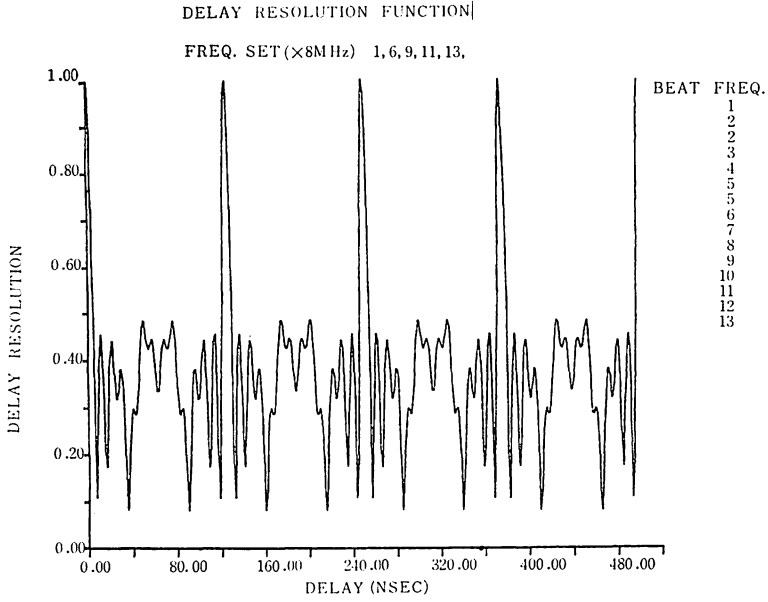
第 4 図 Zero Redundancy の 4 チャンネルバンド幅合成



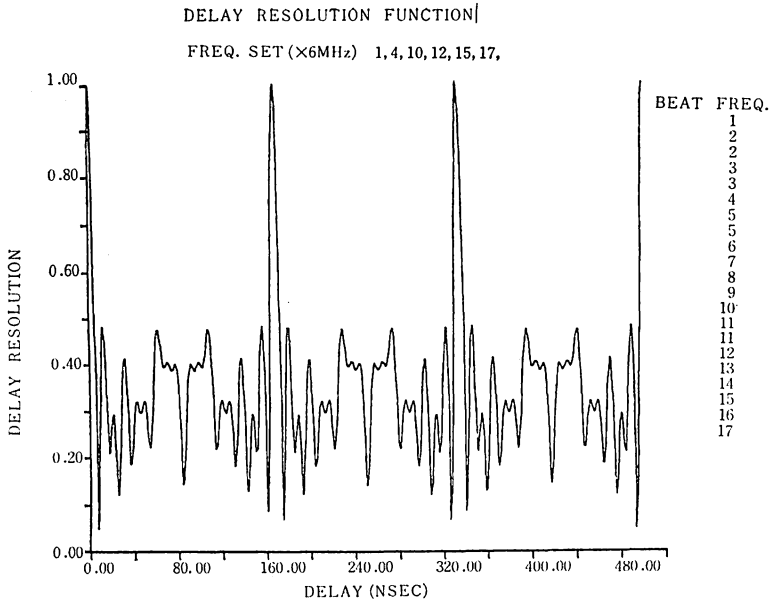
第 5 図 Minimum Redundancy 5 チャンネルバンド幅合成

とった。第4図以下に、最大利用可能ビデオ帯域（初段増幅器—パラメトリックアンプ等—の帯域幅で決まる。）120 MHzを仮定したときの Zero Redundancy, Minimum

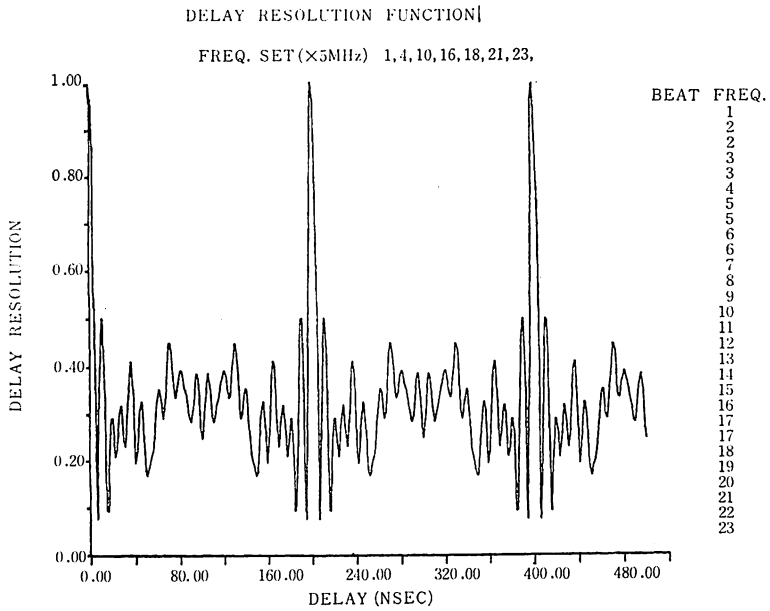
Redundancy による $D_e(\tau')$ を、同様の条件で示した。これらは、すべて良好なサイドローブ特性を持っていることがわかる。



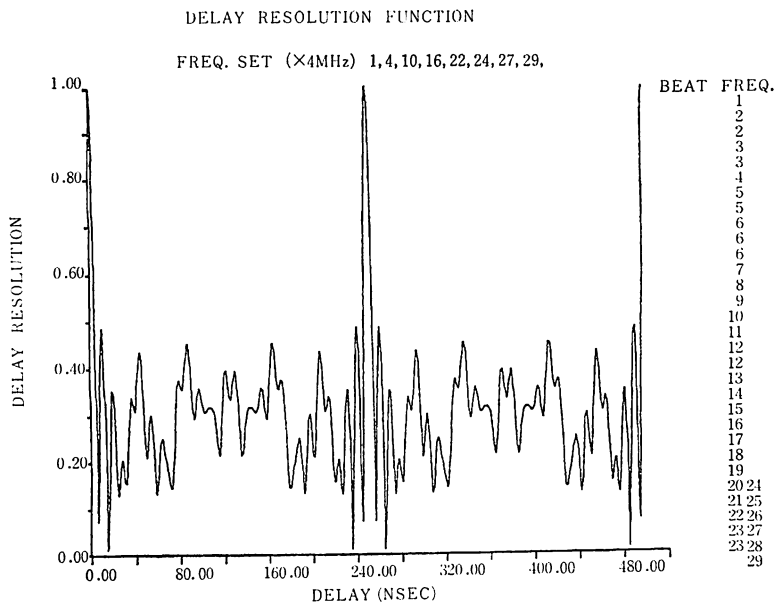
第6図 Minimum Redundancy 6チャンネルバンド幅合成



第7図 Minimum Redundancy 7チャンネルバンド幅合成



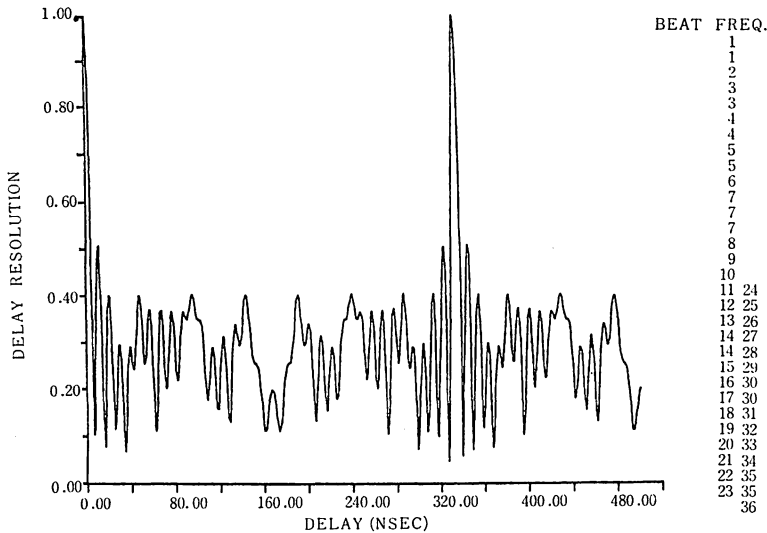
第8図 Minimum Redundancy 8チャンネルバンド幅合成



第9図 Minimum Redundancy 9チャンネルバンド幅合成

DELAY RESOLUTION FUNCTION

FREQ. SET (×3MHz) 1, 3, 6, 13, 20, 27, 31, 35, 36.



第10図 Minimum Redundancy 10 チャンネルバンド幅合成

6. バンド幅合成における
フリッジフェーズの接続

2. で fringe phase の ω に対する1次傾斜若しくは、 $\omega=0$ における fringe phase によって τ_g がより精度よく求まることについて述べた。ここでは同じようにバンド幅合成では、各チャンネルの fringe phase を接続することにより、更に、高精度な τ_g が得られることを示す。

今、第11図(a)に示すようなバラついた n_d 個のデータ (X_i, Y_i) から、最小自乗誤差法で直線近似したとき、その1次傾斜及び y 切片に含まれる誤差 σ_a, σ_b は、4チャンネル S/N で決まる観測データのバラツキ σ_d^2 と、次の関係を持つ。

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{n_d}{n_d \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sigma_d^2}, \quad \dots\dots(22)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n_d \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sigma_d^2}. \quad \dots\dots(23)$$

バンド幅合成によって、 B MHz のビデオ帯域が等価的に $N_{max} f_s$ MHz に n 倍拡大されたとすると、このときの σ_a, σ_b は、(22), (23)式より、

$$\sigma_a' = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n_d r_d}{n_d r_d \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sigma_d^2}$$

$$< \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n_d}{n_d \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sigma_d^2} = \frac{1}{n} \sigma_a \dots\dots(24)$$

r_d : 等価データ増加率

となる。

チャンネル数を N とすると、見掛け上データ数は1チャンネルの場合の N 倍になるが、1チャンネルの場合帯域 B 内にデータが均等に分布しているのに対し、バンド幅合成の場合、帯域 $N_{max} f_s$ 内に偏って分布する(第11図(b))。したがって、 r_d は N より小さいが少くとも1より大きいので、

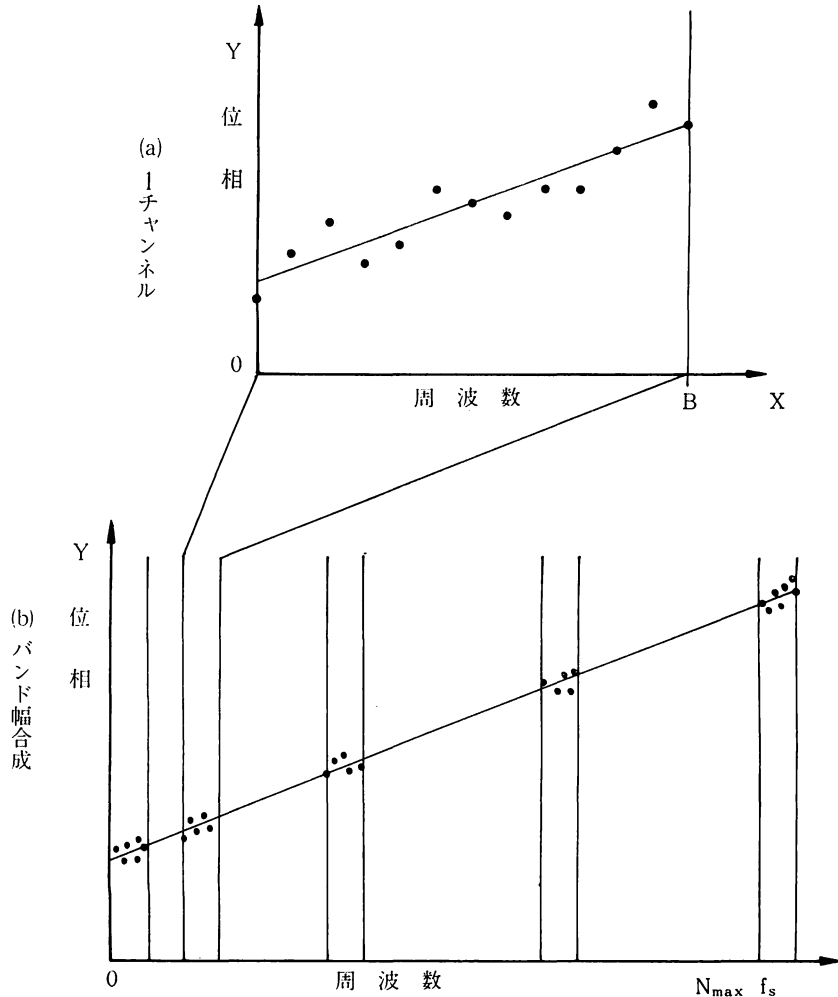
$$1 < r_d < N \quad \dots\dots(25)$$

といえることから、(24)式の不等式が成立する。前記5. で求めた我々の行おうとしているバンド幅合成では、 $B=2$ MHz, $N_{max} f_s=100$ MHz, $n=50$, $\sigma_a=\pm 5$ nsec (本特集号のⅢ参照)であるので、fringe phase の1次傾斜による τ_g の決定精度は(24)式から少くとも ± 0.1 nsec が見込まれる。

また、(23)式から明らかなるように、 $\omega=0$ における fringe phase (y 切片)からも τ_g を決定することができるが、その方法では、バンド幅合成による改善は、ほぼ等価データ増加率に比例し、あまり大きな改善は見込めない。

7. 広帯域初段アンプの影響

1チャンネル方式では、使用するビデオ帯域が比較的狭かったので、2. の(8), (9)式の積分で $S_{xx}(\omega')$ を一定と仮定することができたが、バンド幅合成では超広帯域なビデオ信号を用いるために、もはや初段アンプの広域周波数特性を無視し得なくなる。ここでは、この初段アンプの周波数特性がどのような形でバンド幅合成に影響



第11図 fring phase の接続

を及ぼすかを検討する。

第 k チャンネルにおける周波数振幅特性, 位相特性を $a_k(\omega)$, $\phi_k(\omega)$ とすると, (19)式より, 初段アンプの影響を受けた第 k チャンネルの複素遅延関数 $D_k'(\tau')$ は,

$$D_k'(\tau') = \exp[j(\omega_k \tau' + \theta_k)] \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega') a_k(\omega) \exp[j\phi_k(\omega)] \exp[j\omega \tau'] d\omega \quad \dots\dots(26)$$

となるが, この, $a_k(\omega)$, $\phi_k(\omega)$ はチャンネル切換えによっては変わるが, ω に対しては一定である。つまり,

$$a_k(\omega) = a_k$$

$$\phi_k(\omega) = \phi_k$$

と近似することができ, したがって式(26)は,

$$D_k'(\tau') = a_k \exp(j\phi_k) D_k(\tau') \quad \dots\dots(27)$$

となる。(19)式における, B_1, B_2 の積分範囲を $0 \sim B$ Hz とすると ($\theta_k=0$ とする。),

$$D_k(\tau') = B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'} \exp(j\omega_k \tau') \quad \dots\dots(27)$$

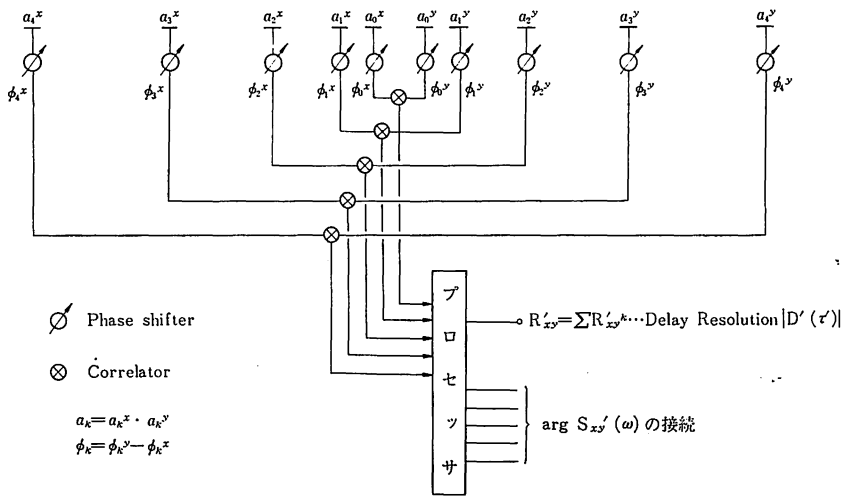
となるから, 初段アンプの影響を受けた複素遅延関数 $D'(\tau')$ は,

$$D'(\tau') = \sum_k D_k'(\tau') = B \frac{\sin \pi B \tau'}{\pi B \tau'} \sum_k a_k \exp[j(\omega_k \tau' + \phi_k)] \quad \dots\dots(29)$$

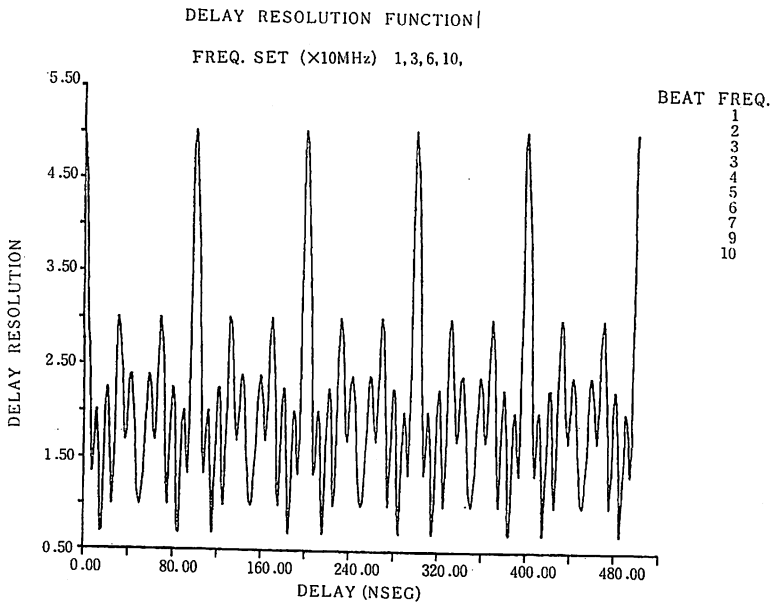
よって(20)式で表される理想状態の $D_e(\tau')$ は, 次のように変わる。

$$D_e'(\tau') = |\sum_k a_k \exp[j(\omega_k \tau' + \phi_k)]|. \quad \dots\dots(30)$$

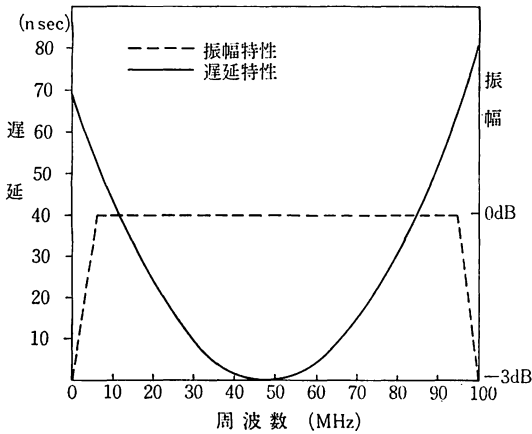
これは, 第12図のように, 各アレイ素子に, a_k, ϕ_k なる振幅及び位相の給電誤差があった場合に等しい。第13図の理想状態の resolution が第14図のような初段



第12図 広帯域初段アンプの影響



第13図 理想状態の resolution



1次遅延量 0.1nsec/MHz (5nsec)
2次遅延量 0.03nsec/MHz² (75nsec)

第14図 広帯域初段アンプの周波数特性 (モデル)

増幅器の周波数振幅特性によって、第15図のようになることを示している。

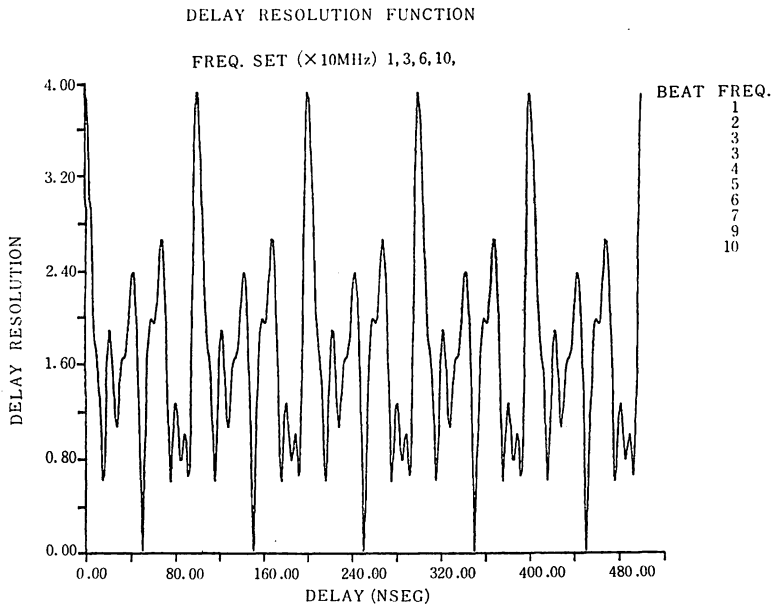
全体に相関値の低下及びサイドローブ特性の劣化をもたらすことが分かる。

8. あとがき

バンド幅合成を具体的に行うにあたっての諸問題、特に、チャンネル周波数の最適組合せを決める具体的指針を与える方法について考慮した。これからは、雑音による精度の劣化について、更に詳細に検討してゆきたい。最後に、この研究の機会を与えて下さった、鹿島支所第三宇宙通信研究室川尻室長はじめ、終始有益な御助言を頂いた室員各位に感謝いたします。

参考文献

- (1) Rogers, Alan E.E.; "Vevy long baseline interferometry with large effective bandwidth for phase-delay measurements", *Radio Science*, 5, 10, Oct. 1970.
- (2) 安達三郎, 後藤尚久; "アンテナの指向性合成の理論と実際", *信学誌*, 59, 1976年3月。
- (3) Moffet, Alan T.; "Minimum-Redundancy Linear Arrays", *IEEE Trans. AP-16*, 2, March, 1968.



第15図 初段増幅器の影響を受けた resolution

