2-2　時間・周波数標準の基本的尺度

2-2 Basic Measures of Time and Frequency Standards

森川容雄
MORIKAWA Takao

要旨

時間及び周波数は現代の科学技術を支える基本的な物理量で、あらゆる物理量の中で最も高精度に計測が可能であり、関連する高性能の計測機器が供給されるようになっている。これらの計測機器やそれを使って得られる計測結果を評価し、比較する際に基本となる概念である周波数の確度と安定度について概説する。

Time and frequency are the most basic physical quantities which support the modern science and technology. They can be measured most accurately among other physical quantities, and various measuring instruments which deal with time and frequency are supplied. In this paper, the basic concepts, accuracy and stability of time and frequency, which are necessary to evaluate and compare the results obtained by using these instruments, are explained.

[キーワード]
確度，不確かさ，安定度，二標本分散(アラン分散)，パワースペクトル密度
Accuracy, Uncertainty, Stability, Two sample variance (Allan variance), Power spectrum density

1　はじめに

近年、科学技術の進歩に伴い、あらゆる分野で高精度、高確度な計測が必要とされるようになっている。なかでも、時間・周波数は各種物理量の中で最も高確度、高精度な計測が可能であり、時間・周波数は時間・周波数標準器に限らず周波数シンセサイザ、スペクトルアナライザ、ネットワークアナライザ、シンクロスコープ等、多くの基本的な計測機器に関係している。これらの計測機器は多くの研究現場や製造現場で使用されており、その使用目的、使用形態は多岐にわたる。また、最近の計測機器は非常に高精度かつ高機能になっており、計測の目的を十二分に果たすためには、計測システムの使用法、性能限界、誤差要因等だけでなく、計測対象量の物理的意味を正確に理解しておくことが必要となっている。ここでは、時間、周波数の精密計測を行う上で必要な基本的な計測上の尺度である確度や安定度の概念を解説する。

2　時間・周波数計測の基本的尺度

2.1　周波数確度及び不確かさとその評価

ITU-R勧告TF.686-1 GLOSSARY[1]では確度(accuracy)を下記のように定義している。

Accuracy; The degree of conformity of a measured or calculated value to its definition

すなわち、計測結果が定義値とどの程度一致しているかを示すのが確度である。ここで時間・周波数の定義値とは「**2-1** 時間・周波数の定義と国際原子時／協定世界時」で述べた値である。時間・周波数の定義値は実際にはセシウム一次周波数標準器により物理的に実現され、その値はトレーサビリティ体系の下でより下位の標準器に受け継がれる。この過程で当然誤差が伴い、計測結果の信頼性は低下する。この計測結果の信頼性を示す尺度が不確かさである。文献[1]では不確かさ(uncertainty)を下記のように定義している。

Uncertainty ; The limits of the confidence interval of a measured or calculated quantity

したがって、確度について述べる場合には必ず不確かさを評価しなければ無意味である。不確かさの評価の仕方はISO国際文書「計測における不確かさの表現のガイド[2]」に詳述されており、ここでは評価のプロセスについて簡単に説明する。

不確かさの評価プロセスは下記のように表される。

(1) 計測の数学モデルの構築
(2) 不確かさ成分の評価
(3) 合成標準不確かさの計算
(4) 拡張不確かさの決定

(1)の数学モデルの構築では、まず、最初に計測プロセスを明確化し、誤差要因をリストアップし、測定量Yと入力量X_iとの関係を$Y=f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$の形で数学的に表す。$f$が理論的に分かっていない時には$X$と$Y$の関係を実験的に求めることが必要になる。(2)の不確かさ成分の評価では各入力推定値x_iの標準不確かさ$u(x_i)$を求める。Yの推定値yの標準不確かさは$u(x_i)$を適切に合成することで、合成標準不確かさ$u_c(y)$として、次式のように計算される。

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \qquad (1)$$

ただし、上式ではx_iの間に相関がないことを仮定しており、相関がある場合は共分散項を考慮する必要がある。実際の計測ではYの個々の測定値はyの周りに分布し、一定の信頼水準を仮定すると大半の測定結果は区間$y \pm ku_c(x_i)$に含まれることになる。ここでkは包含係数で、仮定する信頼水準により$ku_c(x_i)$を拡張不確かさと呼ぶ。正規分布を仮定できる場合は$k=2$を採用した場合は95%の信頼水準を、また$k=3$を採用した場合は99%の信頼水準を意味する。

一次周波数標準器の出力周波数νは次式で表される。

$$\nu = \nu_o + \sum \frac{\partial \nu}{\partial x_i} dx_i \qquad (2)$$

ここでν_0は定義値であり、各x_iは様々の周波数シフト要因変数であり、具体的には磁場シフトや二次ドップラーシフト、共振器周波数シフト、黒体輻射シフト、重力ポテンシャルシフト等であり、各シフト要因については他で詳細を述べているので参照されたい[3]。一次周波数標準器の確度を評価するということは(2)式の周波数シフト項を評価しその不確かさ$u(x_i)$を評価することである。

二次周波数標準器等、下位の標準器の周波数ν'は上位の周波数標準器と比較し評価される。

$$\nu' = \nu + m \qquad (3)$$

ここでmは周波数比較結果であり、その不確かさは上位の周波数標準器の不確かさ$u(\nu)$と$u(m)$から構成される。$u(m)$には周波数比較計測システムの持つ不確かさのほかに、GPSコモンビューのような周波数比較リンクを使用した場合には、周波数比較リンクに起因する不確かさも含まれる。

2.2 周波数安定度

文献[1]では周波数安定度(frequency instability)を下記のように定義している。

Frequency instability; the spontaneous and/or environmentally caused frequency change within a given time interval

すなわち、周波数標準器の出力周波数がある一定時間内でどの程度一定かを示すのが周波数安定度である。時間・周波数標準分野では原子周波数標準器を時計として長期間連続運転することが一般的である。このため、周波数安定度の尺度には、短期間の変動だけでなく数か月から1年、時には数年に及ぶ期間での安定度を適切に表現できることが求められる。

周波数変動要因には雑音と発振器や測定系に対する外部擾乱の二つがある。雑音はその発生メカニズムの違いにより後述する5種類に分類されるが、このうち、フリッカFM雑音やランダムウォークFM雑音と呼ばれる雑音による周波数変動は無限時間で平均すると、その古典的分散は発散してしまうという特徴を持っている。こ

のため、古典的分散は周波数安定度の尺度として使用できない[4]。外部擾乱としては、温度や磁場等の擾乱があり、周期的な擾乱と長期的なドリフトが考えられる。周波数変動要因によって周波数変動の振る舞いは異なるため、実際のシステム周波数変動の振る舞いからどの変動要因が支配的原因となっているか推測し、システムの性能改善を図ることができる場合もある。

周波数安定度の尺度として、周波数領域の尺度と時間領域の尺度がある。周波数領域の尺度は周波数変動をそのパワースペクトル密度で表現したもので、ゆっくりした周波数変動成分、あるいは早い周波数変動成分がどの程度あるかを示すものである。時間領域の尺度は周波数変動をτ秒間の平均周波数の時系列的変化を分散で表現したものであり、両者の間には一定の変換則が確立されている。周波数領域の尺度はフーリエ周波数が約1Hz以上（平均化時間約1秒以下）の早い周波数変動を表現するのに適しており、付加的な位相雑音などに汚された信号のスペクトル純度を表現するのに使われる。これに対し時間領域の尺度は主に周波数や位相の比較的長い時間の安定さを表すのに適しており、時間周波数標準分野では時間領域の尺度がよく使われている。時間領域の尺度としては、測定個数Nを十分大きくとり、その平均値の周りの分散を考えるのが基本になるが、既に述べたようにフリッカFM雑音やランダムウォーク雑音による周波数変動は$N\rightarrow\infty$で発散してしまうという問題を持っている。このため、有限のNに対し分散を計算し、それを無限時間平均し発散を避ける手法が確立している。この方法でN=2としたのが二標本分散（アラン分散）と呼ばれるもので、時間領域の安定度の尺度の基本となるものである。

周波数や位相の変動は基本的にランダムな現象であり、その尺度は統計量で表現される。以下では、周波数や位相の変動の統計的表現について述べる。まず、発振器の出力信号$V(t)$を以下のように表す。

$$V(t)=\left[V_0+\varepsilon(t)\right]\sin\left[2\pi\nu_0 t+\phi(t)\right] \qquad (4)$$

ただし、V_0、ν_0はそれぞれ出力信号の振幅及び周波数の公称値であり、ε、ϕは振幅変動及び位相変動を表す。瞬時位相値$\Phi(t)$を

$$\Phi(t)=2\pi\nu_0 t+\phi(t) \qquad (5)$$

とすると、瞬時周波数$\nu(t)$は次式のようになる。

$$\nu(t)=\left(d\Phi/dt\right)/2\pi=\nu_0+\dot{\phi}(t)/2\pi \qquad (6)$$

時間周波数標準分野で扱う信号は純度が高く、ε、ϕは一般に十分小さいので、以下の条件を仮定する。

$$\left|\varepsilon(t)/V_0\right|\ll 1 \qquad (7)$$

$$\left|\dot{\phi}(t)/2\pi\nu_0\right|\ll 1 \qquad (8)$$

以下では、周波数変動を公称値で規格化した相対値$y(t)$を用いる。

$$y(t)=\dot{\phi}(t)/2\pi\nu_0 \qquad (9)$$

また、時間変動$x(t)$を次のように定義する。

$$x(t)=\phi(t)/2\pi\nu_0 \qquad (10)$$

$y(t)$や$x(t)$の変動を時間軸の観点から見るか周波数軸の観点から見るかで、使用する統計量が異なる。時間軸の観点から見る場合は分散あるいは次式で表される自己相関関数$R_y(\tau)$が基本になる。

$$R_y(\tau)=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t)y(t+\tau)dt=\left\langle y(t)y(t+\tau)\right\rangle \qquad (11)$$

ただし、〈 〉は無限時間平均である。一方、周波数軸の観点から見る場合は、$y(t)$をf〜$f+\Delta f$の狭帯域フィルタを通過させて得られる$y(t,f,\Delta f)$を二乗平均し、単位帯域幅に換算したパワースペクトル密度$S_y(f)$が基本統計量になる。

$$S_y(f)=\lim_{\Delta f\rightarrow 0}\frac{1}{\Delta f}\left\langle y(t,f,\Delta f)^2\right\rangle \qquad (12)$$

$R_y(\tau)$と$S_y(f)$はよく知られているようにWiener-Khintchineの式で結び付けられている。

$$S_y(f)=4\int_0^\infty R_y(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau \qquad (13)$$

$$R_y(\tau)=\int_0^\infty S_y(f)\sin(2\pi f\tau)df \qquad (14)$$

ただし、$S_y(f)$は$0\leqq f\leqq\infty$で定義された片側スペクトル密度である。また、(9)、(10)式から位相変動や時間変動のパワースペクトル密度$S_\phi(f)$、$S_x(f)$と$S_y(f)$の関係は次式のようになる。

$$S_y(f)=\omega^2 S_x(f)=(f/\nu_0)^2 S_\phi(f) \tag{15}$$

(4)式の信号をスペクトルアナライザで観測して得られるのはRFスペクトル$S_{RF}(f)$であるが、(7)、(8)式の条件が成立する場合は、$S_\phi(f)$と関係付けられ、搬送波レベルCに対するサイドバンド比$L(f)$として下記のように表される。

$$L(f)=S_{RF}(\nu_0+f)_{PM}/C\cong S_\phi(f)/2 \tag{16}$$

$S_y(f)$は次式のようにフーリエ周波数fの多項式で表すことができる。

$$S_y(f)=\sum_{\alpha=-2}^{2}h_\alpha f^\alpha \tag{17}$$

$\alpha=2$は白色PM雑音、$\alpha=1$はフリッカPM雑音、$\alpha=0$は白色FM雑音、$\alpha=-1$はフリッカFM雑音、$\alpha=-2$はランダムウォーク雑音と呼ばれている。

白色PM雑音はαが最も大きく、fが十分大きい領域で支配的になるが、これは発振器で発生される信号に常に重畳される付加雑音によるものである。マイクロ波も含んだ電磁波の低い周波数領域の付加雑音は熱雑音kTであり、光周波数領域では量子雑音$h\nu_0$である。そのパワースペクトル密度の形は雑音の性質に依存してkTf^2/ν_0^2Pあるいは$h\nu_0 f^2/\nu_0^2P$のようになる[5]。ここでPは発振器の出力電力、ν_0は発振周波数、hはプランク定数である。

フリッカPM雑音は主に増幅器などの回路素子の非直線性によってフリッカ雑音で位相変調されて生じる[4]。

白色FM雑音は能動的、受動的周波数標準器の両方に存在する。発振器(能動的標準器)の場合では、白色FM雑音は発振ループ内の雑音によって発振が乱されるために生じるため、発振の鋭さを示すQ値に依存する。ただし、発振スペクトル線の半値幅を$\Delta\nu$とすると$Q=\nu_0/\Delta\nu$である。パワースペクトル密度はマイクロ波標準器(メーザ等)ではkT/PQ^2、光周波数標準器(レーザ等)では$h\nu_0/PQ^2$の形になる[5]。マイクロ波標準器の場合、発振器のループ帯域幅を決めるのは原子遷移線のスペクトル幅であり、したがってQは原子遷移線のスペクトルQになる。一方、光標準器では一般的に共振器Qが原子遷移線のスペクトルQより大きいので、共振器Qがループ帯域幅を決めている。受動的周波数標準器では、白色FM雑音は共振の検出に固有の雑音によって周波数制御ループが乱されることによって生じる。

フリッカFM雑音とランダム・ウォーク雑音はすべての周波数標準器の長期安定度を制限する要因である。この種の雑音は水晶共振器にも見られ、その場合ではフリッカー雑音のレベルは$1/Q^4$に比例する。ただし、Qは共振器のQである。フリッカ周波数雑音とランダム・ウォーク雑音は環境条件に関連して電子回路内や周波数標準器内でも発生する[5]。

現実の周波数測定では、瞬時周波数$y(t)$を測定することはなく、必ず周波数カウンタのゲート時間や位相測定の平均化時間τで平均化された周波数$\bar{y}_k$が測定される。

$$\bar{y}_k=\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_k+\tau}y(t)dt=\left[\phi(t_k+\tau)-\phi(t_k)\right]/2\pi\nu_0$$
$$=\left[x(t_k+\tau)-x(t_k)\right]/\tau \tag{18}$$

τ秒平均周波数をT秒間隔でN回測定して得られる$\bar{y}_k$の時系列データの分散s^2は$\bar{y}_k$の変動の大きさを示す尺度の一つである。

$$s^2=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{y}_n-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\bar{y}_k\right) \tag{19}$$

上式はよく使用されている古典的な不偏分散であるが、$N\to\infty$とし無限時間平均をとるとフリッカFM雑音やランダムウォーク雑音の項は発散してしまい、有限時間の測定では観測時間やサンプリングの仕方により得られる分散が異なり、信号の周波数安定度を表す尺度としては適当でない。この問題は1960年代にAllanやBarnes等によって検討され、周波数安定度の時間領域の尺度とし次式で表される分散が定義された。

$$\left\langle\sigma_y^2(N,T,\tau)\right\rangle=\left\langle\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{y}_n-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\bar{y}_k\right)\right\rangle \tag{20}$$

(19)式と(20)式は類似しているが、根本的な違いがある。(19)式では$N\to\infty$で無限時間平均での分散が得られることを期待しているのに対し、(20)式ではNすなわち有限の観測時間NTに限定して標本分散を定義し、それを無限時間にわたって平均してフリッカFM雑音やランダムウォー

ク雑音が発散するのを避けている。特に$N=2$で$T=\tau$の場合はアラン分散あるいは二標本分散と呼ばれる次のような単純な形が得られる。

$$\sigma_y^2(\tau)=\left\langle\left(\bar{y}_{i+1}-\bar{y}_i\right)^2/2\right\rangle \tag{21}$$

(21)式と(20)式、あるいは(17)式の間には表1[6]に示す一定の数学的関係があり相互に変換が可能である。このため、アラン分散は非常に有用であり広く使用されている。

実際の周波数標準器の周波数安定度は上記の雑音による影響のほか、温度変動や外来雑音等、外部からの擾乱の影響も受ける。例えば、実験室の温度が空調により周期的に変動し、発振器の周波数が影響を受ける場合等である。ここで、$\tau^{-1/2}$特性の水素メーザ周波数標準器の実験室の温度が周期T_mで変化し、これが共振器プリング効果を引き起こしメーザ発振周波数もT_mで変動しているとする。この時のメーザの安定度は$\tau^{-1/2}$特性が$\tau\sim T_m/2$あたりが盛り上がったような形になる。このような特性が観測された場合は、室温の温度変動を改善する、あるいはメーザ本体の温度特性を改善することで周波数安定度を改善することができる。また、温度等のドリフトにより発振器の出力周波数もドリフトしている場合の$\sigma_y(\tau)$は簡単な計算によりτに比例した特性を示すことが分かる。

アラン分散は非常に有用な指標であり、広く使用されているが、表1に示すようにホワイトPM雑音とフリッカPM雑音はいずれもτ^{-2}の形になり両者を区別できない。この欠点を改善した修正アラン分散$\mathrm{Mod}\,\sigma_y^2(\tau)$が提案された[7]。$\mathrm{Mod}\,\sigma_y^2(\tau)$は次式で定義される。

$$\mathrm{Mod}\ \sigma_y^2(\tau)=\frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{y}_{j+n}-\bar{y}_j\right)\right)^2\right\rangle \tag{22}$$

$$\bar{y}_{j+n}=\frac{1}{\tau}\int_{t_0+(j+n)\tau_0}^{t_0+(j+2n)\tau_0}y(t')dt' \tag{23a}$$

$$\bar{y}_{j}=\frac{1}{\tau}\int_{t_0+j\tau_0}^{t_0+(j+n)\tau_0}y(t')dt' \tag{23b}$$

ただし、$\tau=n\tau_0$であり、τ_0を一定としnはτに比例するようにする。$\mathrm{Mod}\,\sigma_y^2(\tau)$は白色PM雑音に対し$\tau^{-2}n^{-1}$に比例する特性を示す。一方、フリッカPMに対してはnが十分大きいときにはτ^{-2}特性を示し、二つの雑音は区別される。

表 1　周波数安定度尺度の関係（f_hは測定帯域幅）

	$\sigma_y^2(\tau)\quad [N=2,\ T=\tau]$	$\left\langle\sigma_y^2(N,\tau,\tau)\right\rangle$
f^0PM雑音 $S_y(f)=h_2 f^2\quad 2\pi f_h\tau\gg1$	$h_2\dfrac{3f_h}{(2\pi\tau)^2}$	$h_2\dfrac{N+1}{N(2\pi)^2}\bullet\dfrac{2f_h}{\tau^2}$
f^{-1}PM雑音 $S_y(f)=h_1 f$ $2\pi f_h\tau\gg1\ \ 2\pi f_h T\gg1$	$h_1\dfrac{1}{(2\pi\tau)^2}\{3[2+\ln(2\pi f_h\tau)]-\ln2\}$	$h_1\dfrac{2(N+1)}{N(2\pi\tau)^2}\left[2+\ln(2\pi f_h\tau)-\dfrac{\ln N}{N^2-1}\right]$
f^0FM雑音 $S_y(f)=h_0$	$h_0\dfrac{1}{2}\tau^{-1}$	$h_0\dfrac{1}{2}\tau^{-1}$
f^{-1}FM雑音 $S_y(f)=h_{-1}f^{-1}$	$h_{-1}\bullet2\ln2$	$h_{-1}\dfrac{N\ln N}{N-1}$
f^{-2}FM雑音 $S_y(f)=h_{-2}f^{-2}$	$h_{-2}\dfrac{(2\pi)^2\tau}{6}$	$h_{-2}\dfrac{(2\pi)^2\tau}{12}N$

このほかに最近は時間間隔誤差TIE（Time Interval Error）やTime Varianceと呼ばれる尺度も使用されるようになっている。ここでは、その定義を紹介するにとどめるが、詳しくは文献[8]を参照されたい。TIEはデジタル通信網の同期等でも使用される指標で次式で定義される。

$$\mathrm{TIE}(t,\tau)=x(t+\tau)-x(t)-\tau y(t,\tau) \tag{24a}$$

$$y(t,\tau)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} y(t')dt' \tag{24b}$$

TIEは$t=0$で周波数、時刻ともに一致している二つの発振器の出力がτ秒後にどれくらいの時刻差を示すかを表すものである。TIEの統計的期待値は次式のようにアラン分散で表される。

$$\mathrm{E}\left[TIE^2(t,\tau)\right]=2\tau^2\sigma_y^2(\tau) \tag{25}$$

Time Variance $\sigma_x^2(\tau)$は通信網の性能を表す指標として使用されており、次式で定義される。

$$\sigma_x^2(\tau)=\frac{1}{3}\tau^2\mathrm{Mod}\ \sigma_y^2(\tau) \tag{26}$$

3 まとめ

時間及び周波数は自然現象を記述する上で最も基本的な物理量であるばかりでなく、他の物理量に比べ圧倒的な正確さで計測が可能であるため、現代の科学技術の多くの分野で重要な役割を果たしている。このため、時間・周波数に関連する高性能の計測機器が数多く供給されるようになっている。これらの計測機器やそれを使って得られる計測結果を評価し、比較する際に基本となる概念である周波数の確度と安定度について概説した。

参考文献

1 Recommendation ITU-R TF.686-1 GLOSSARY.
2 飯塚幸三監修，ISO国際文書「計測における不確かさの表現のガイド」，日本規格協会，1996.
3 森川容雄，"セシウム一次周波数標準器と周波数確度"，通信総合研究所季報，Vol. 45，No.1/2 March／June 1999.
4 吉村和幸，古賀保喜，大浦宣徳，"周波数と時間－原子時計の基礎／原子時の仕組み－"，電子情報通信学会，1989.
5 J. Vanier, C. Audoin, "The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards", pp.232, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, 1989.
6 J. A. Barnes, et al., "Characterization of frequency stability", IEEE Trans., IM-20, pp.105, May 1971.
7 D. W. Allan and J. A. Barnes, "A modified Allan variance with increased oscillator characterization ability", Proc. 35th Annu. Frequency Control Symposium, pp.470, May 1981.
8 ITU-R Handbook, "Selection and Use of Precise Frequency and Time Systems", 1997.

森川容雄（もりかわたかお）
電磁波計測部門研究主管
周波数標準、時空計測