

# 3 原子周波数標準

## 3 Atomic Frequency Standards

### 3-1 原子周波数標準器の基礎物理

#### 3-1 Basic Physics in the Atomic Frequency Standards

細川瑞彦

HOSOKAWA Mizuhiko

#### 要旨

現在の時間・周波数の標準単位としての秒は、セシウム原子の超微細構造遷移に基づいた定義がされており、原子時計、原子周波数標準器は原子の様々な量子遷移を利用している。これを理解するために本稿では、原子のエネルギー準位、その寿命と量子遷移、そして遷移周波数の高精度測定のためのラムゼー共鳴について概観する。

Today, the second, unit of time, is defined by using the hyper fine transition of cesium atoms. In atomic clocks and atomic frequency standards, various quantum transitions are used. To understand how these equipments works, elementary and intuitive illustrations are show in this paper. The main topics are the energy level of atoms, life time, quantum transition and radiation, and the Ramsey resonance for the precise measurement of the transition frequency.

#### [キーワード]

原子周波数標準, エネルギー準位, 量子遷移, 寿命, ラムゼー共鳴

Atomic frequency standards, Energy level, Quantum transition, Life time, Ramsey resonance

## 1 序論

本特集 2-1 でも示されているように[1]、現在の秒の定義はセシウム原子の超微細構造準位間の遷移に対応する電磁波の周期によってなされている。現在の科学が自然現象のすべてを説明したわけではないが、量子力学による原子のエネルギー構造の記述は、大変高い精度で普遍的かつ時間的に不変な法則と定数に基づいているものと考えられ、原子の量子遷移に対応する電磁波が、時間・周波数の標準においては、定義にも実際の実現においても最適なものと、現在では広く認められている。

この定義と原子周波数標準器の動作を理解するには、広く電磁気学、量子力学、原子物理な

どの理解が欠かせないものになる。これを詳細に解説した名著[2]があるが、非常に大部なもので読み通すことは容易ではない。時間・周波数標準の教科書の一章として、より簡単に、概要をつかみやすくした好著[3][4]もあるが、ここではそれらに至る基礎として、関係する基礎的な物理をできるだけ直感的に理解できるような解説を試みる。主な話題としては、原子のエネルギー準位、電気双極子遷移などの量子遷移、ラムゼー共鳴を取り上げる。いずれも理工系大学2年から3年生程度で履修する力学、電磁気学、量子力学の知識があれば十分理解できるような記述にするよう心がけた。

もちろんこの短い解説ではすべてを説明しきれないので、詳細に関しては上記の文献[2]-[4]を

是非参考にさせていただきたい。この解説がそれらの良書を理解するための足がかりを、多少とも提供できれば幸いである。

## 2 原子のスペクトルとエネルギー準位

量子論の特徴をごくおおざっぱにいうと位相空間(系を構成する物質の位置と運動量を軸とする仮想的な空間)の領域が、各々の面積がプランク定数 $h$ となるようにとびとびに区分されて、その区分ごとがそれ以上区別のつかない一つの物理状態となっているということ、といえよう。その結果の一つとして、束縛系ではとびとびのエネルギーの状態(エネルギー準位)が存在する、ということが示される。これについては朝永氏の量子力学の教科書[5]での調和振動子の説明が見事であるが、もっと単純かつ極端な例として、井戸型ポテンシャルの問題でも同様のことが見て取れる。

長さ $L$ の範囲ではポテンシャルゼロ、その外ではポテンシャル無限大の井戸型ポテンシャルの例では、その中に閉じこめられた粒子は $0 \sim L$ の範囲に広がっている。位相空間がプランク定数 $h$ を単位としてとびとびになっているとすると、空間の範囲が $L$ に限られることと、波動的な見方によれば正方向と逆方向の波が重なって定在波を作っていることから、 $n$ 番目の状態の運動量 $P_n$ は

$$P_n = \frac{h}{2L} n, \quad n=1,2,3 \dots \quad (1)$$

のとびとびになると考えられる(図1)。

これから、粒子の質量が $m$ であるとする $n$ 番目の状態のエネルギー $E_n$ については

$$E_n = \frac{P_n^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} \quad (2)$$

という値が、シュレディンガー方程式を持ち出すまでもなく得られる。このように、量子論を用いると、有限範囲に束縛された系では運動量とエネルギー準位もとびとびの値を取ると考えられる。

電磁波の量子である光子は、発生したら有限の場所に閉じこめられることなく無限の彼方ま

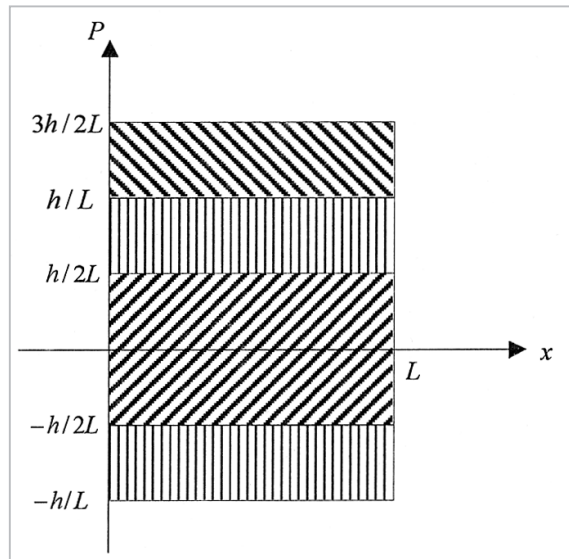


図1 井戸型ポテンシャルの系の位相空間と量子化された領域

定在波の領域は運動量の正負両方を合わせたものになっている。

で伝わると考えられる。この場合エネルギーは連続した値を取り、よく知られたアインシュタインの光量子の公式

$$E = h\nu \quad (3)$$

が成り立つが、これも波動の $c = \lambda\nu$ 、光子の $E/c = p$ などの公式と合わせて考えると、光子の波長と運動量を掛けたものがプランク定数によって量子化されている、と見ることができる。また、原子物理において重要な物理量として角運動量が挙げられる。これは角度に共役な一般化運動量と考えることができるが、角度は $0$ から $2\pi$ ラジアン $\pi$ の範囲しか取らないため、不定性の最大範囲は $2\pi$ である。このため角運動量は $h/2\pi$ を単位として量子化される。このように、位相空間の広がった領域に対し、プランク定数の大きさの面積ごとに一つの量子状態が決まる、ということは、位相空間の各点ごとが一つ一つ独立の物理的状態である、という古典力学の概念とは大分かけ離れたものであるが、この点以外では、現象の記述の上で、古典物理学もほとんどの場合有効である、ということは忘れてはならない。

系の範囲が有限か無限か、という点では、原子とは、コンパクトな原子核の近傍およそ $0.1\text{nm}$ 程度の領域に、電子系が電磁気力で閉じこめら

れている有限範囲の束縛系であると考えられる。このため、原子という物理系はとびとびのエネルギー準位を持つ存在である。電子が原子核の作るポテンシャルによって $10^{-10}\text{m}$ 程度の範囲に閉じ込められていると考えれば、ごくおおざっぱにはこの場合、原子の大きさ程度の井戸型ポテンシャルに閉じ込められた電子がエネルギー準位を作ると考えられる。この準位を計算することによって、原子のエネルギー準位がどの程度になるかを推定することができる。プランク定数 $h$ 、電子の質量 $m$ 、電子が閉じ込められている範囲を $L$ とすると(2)式から閉じ込められた電子のエネルギー準位に対しても次の表現が得られる。

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} \quad (4)$$

プランク定数 $h$ を $6.63 \times 10^{-34}$  [J·s]、電子の質量 $m$ を $9.11 \times 10^{-31}$  [kg]、 $L$ を $1.0 \times 10^{-10}$  [m]とすると、 $n=1$ の状態に対しては

$$E_{n=1} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2 [\text{J} \cdot \text{s}]^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} [\text{kg}] \times (1 \times 10^{-10})^2 [\text{m}]^2} \quad (5)$$

$$= 6.04 \times 10^{-18} [\text{J}]$$

となる。このエネルギーに相当する光子の周波数 $\nu$ は、 $E=h\nu$ より

$$\nu = \frac{6.04 \times 10^{-18} [\text{J}]}{6.63 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]} \quad (6)$$

$$= 9.10 \times 10^{15} [\text{Hz}]$$

となる。この問題は、井戸型ポテンシャルの中で運動エネルギーゼロの粒子を、一つ準位を励起するにはどれだけエネルギーが必要か、という問題であるが、これは現実には有限のポテンシャルで閉じ込められた粒子がそこから飛び出していくのに必要なエネルギーと、オーダーとしてはほぼ同じものが得られると考えられる。もちろん詳細は、ポテンシャルの形に大きく依存するが、ここで得られた周波数はかなり短波長の紫外線に相当するので、原子のイオン化には紫外線が必要、という実際とそれほどかけ離れていない結果が得られたことになる。井戸型ポテンシャルは原子に対しては現実的なモデルとは言い難いが、現象のオーダーを推定するには、

それなりに有用であることが分かる。

原子のエネルギー準位は、より厳密には教科書にあるクーロンポテンシャルに閉じ込められた水素原子の例[6]-[8]が基本となるが、その場合に出てくる主量子数、軌道量子数の準位ばかりではなく、軌道角運動量、スピン、それらの相互作用、外からの電磁場など内部、外部の様々な要因で複雑化する。ここでよく使われる記号として、電子の軌道角運動量は $l$ 、スピンは $s$ 、これらを合わせた電子の全角運動量は $J$ と表される。軌道角運動量 $l$ については、 $l=0, 1, 2, \dots$ の状態をそれぞれS状態、P状態、D状態…と名付けられている。原子核のスピンは $I$ と表される。電子と核の角運動量をすべて合成して得られる量が、 $F$ と呼ばれている。

エネルギー準位が接近したひとまとまりがある場合、これは微細構造と呼ばれる。この構造は通常は軌道-スピン相互作用によって生じる。スピンスピン磁気相互作用などにより、さらに接近したまとまりがある場合、これを超微細構造と呼ぶ。これらについて、セシウム原子での例を考えてみよう(図2)。

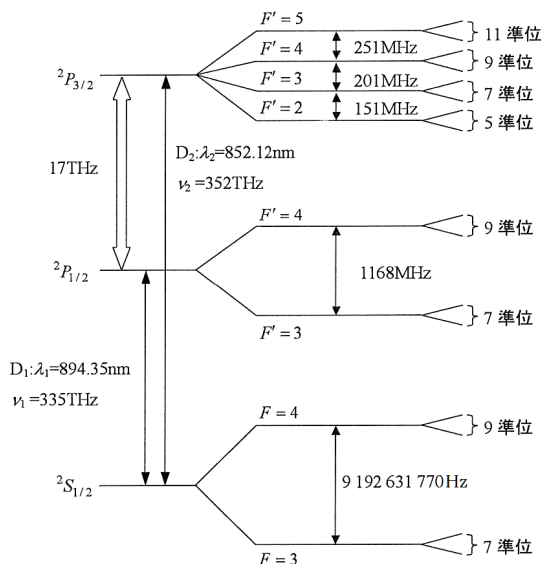


図2 セシウム原子のエネルギー準位、微細構造と超微細構造

$^2P_{1/2}$ と $^2P_{3/2}$ の17THz分のエネルギー差が微細構造。 $^2S_{1/2}$ の $F=3$ と $F=4$ の9GHz分のエネルギー差が超微細構造。

基底状態であるS状態と、角運動量の一つ励起されたP状態の遷移に対応する周波数は



300THz以上である。P状態は軌道とスピンの合成角運動量が $1/2$ 、 $3/2$ の二つに分裂しているが、その差はおよそ17THz、これが微細構造になる。セシウムの原子核は、核スピン $I=7/2$ を持っている。原子の基底状態では $l=0$ であり、核スピン $7/2$ と電子のスピン $1/2$ を合成した全角運動量 $F$ が3か4かでわずかなエネルギー準位の差が生じる。これが超微細構造であり、その遷移に対応する周波数はおよそ9GHzとなっている。通常のエネルギー準位に比べ、微細構造では数十分の一、超微細構造ではさらにその千分の一程度という小さな間隔になっていることが分かる。また、それぞれの準位は核スピンと合わせた全角運動量に応じ、磁場の中ではゼーマン効果によって更に細かい準位に分裂していく。

### 3 原子と電磁波の相互作用

ある量子状態が厳密にエネルギー固有状態であれば、一度その状態をとればそれ以降はいっさい他の状態に遷移することなく無限の寿命でその状態に居続けると考えられる。しかし、実際には多くの場合、ある量子状態は様々な相互作用によって有限な時間で他の状態に遷移していく。特に高いエネルギー状態に励起された場合には、外界からエネルギーを与えることがなくても、原子内部の相互作用によって自然により低いエネルギー状態へ遷移していく。励起された状態がこのように何らかの相互作用で、単位時間当たりある確率で低いエネルギー準位に遷移するならば、時間の経過に伴って最初の状態にある確率はどんどん減っていく。このような場合、その励起エネルギー準位は有限の寿命を持っているという。具体的な寿命の定義としては、最初の状態にある確率が $1/e$ になる時間がその状態の寿命である、という定義がしばしば用いられる。また、存在確率が $1/2$ になる時間は半減期と呼ばれ、これもしばしば用いられる量である。

寿命がある、ということはそのエネルギー準位が確定された値ではなく、有限の幅を持った存在になっているということである。このため、各エネルギー準位間の量子遷移の周波数も、確定したものではなく有限の幅を持つことになる。

周波数標準への利用ということを考えると、できるだけ寿命の長い単位間の、周波数幅が狭い遷移を用いるのが望ましいことになる。寿命の長い準位はなかなか遷移を起こさない、という問題もあるが、これは誘導放出という、外力によって遷移を起こさせる方法[9]-[11]もあるので、そのように制御できる範囲でやはり寿命の長い遷移が望ましい、ということになる。

励起状態の寿命を計算するには厳密にはきちんとした量子力学的な取扱いが必要であるが、直感的な理解としては、完全に量子論的ではなくとも、半古典的取扱いによっておよその目安が分かる。古典論を用いることは、素過程についての記述は正しくはないが、巨視的に観測される量としては意味を持つ。これは、ポテンシャルが波束の広がり範囲では無視し得る程度にしか変化しない場合には波動関数の期待値の運動は古典的運動に等しい、というエーレンフェストの定理などからも期待できることである。よって、多数の原子を扱う場合、量子論的な確率過程の総和に対応する量として、半古典的描像は十分意味を持つ。また、積極的な意味として、具体的なイメージの描きやすい古典論に、一部本質的なところで量子論を適用することによって、現象の直感的な理解と現象のオーダーエスティメーションに大きく役立つことが多い。ただし、用いるモデルは現象のある一部を理解するためのものであり、多くの点は実際とは違う比喩的なものであることについて混乱しないよう、注意が必要である。

ここでは、古典論的な扱いを基本として、これに一部量子論の考えを取り入れることにより、原子の量子遷移に関する描像と現象の数値的な把握を試みる[12]。

最初に、基本となる電気双極子遷移について、双極子の電荷が単振動するという古典モデルの描像で考えてみよう(図3)。

重い核に電荷 $-e$ 、質量 $m$ 、の電子が、ばね定数 $m\omega_0^2$ (固有振動 $\omega_0$ )でつながれており、振動する際には双極子放射により、ごく弱い減衰 $1/\tau$ で減衰していくとする。原子核がほとんど動かないとすると、原子のエネルギー変化は電子の運動によるものだけと考えられる。また、減衰は非常に弱いため、個々の瞬間にはこの減衰振

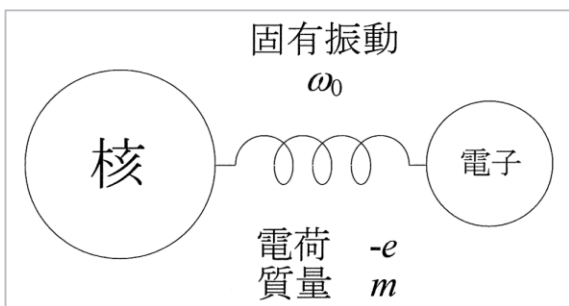


図3 原子の電気双極子放射に対する古典的なモデル

固有振動 $\omega_0$ の電子の振動によって電磁波が放射されるという現象を機械的なモデルで表現したもの。

動の運動とエネルギーは単振動として十分よく近似できるとする。つまり原子のエネルギー $E(t)$ は近似的に

$$E(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \quad (7)$$

で記述されるが、徐々に

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

というように減衰していき、この際には

$$\omega_0 \gg 1/\tau \quad (9)$$

が成り立っているとすると。

双極子モーメントを $d$ とするとこの振動による放射においてはそのパワーは

$$P = \frac{2}{3} \frac{\dot{d}^2}{c^3} \quad (10)$$

で表される[13]。

ここで双極子を原子の広がり範囲程度の振幅の電荷の単振動と考えてみよう。原子の大きさを $a$ とすると振動方向の一次元については電荷の位置 $x$ は

$$x = a \sin \omega_0 t \quad (11)$$

と表され、

$$d = ex = ea \sin \omega_0 t \quad (12)$$

より

$$\ddot{d} = -e \omega_0^2 x \quad (13)$$

が得られる。これを(10)式に代入すると

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^4 x^2}{c^3} \quad (14)$$

が得られる。係数の詳細には目をつぶりごくおおざっぱに $x$ の平均値が振幅 $a$ と同程度とすると、放射パワーの平均値 $\langle P \rangle$ は

$$\langle P \rangle \sim \frac{e^2 \omega_0^4 a^2}{c^3} \quad (15)$$

この場合、 $\tau$ 秒間の放射エネルギーはおおよそ $\langle P \rangle \tau$ 程度と見積もられる。これが量子遷移の素過程で放出される、角周波数 $\omega_0$ の光子のエネルギーに等しい程度であるとする $E_0 \sim \langle P \rangle \tau \sim \hbar \omega_0$ と(15)式より

$$\tau \sim \frac{\hbar c^3}{e^2 \omega_0^3 a^2} \quad (16)$$

が得られる。これに微細構造定数 $\alpha = e^2/\hbar c$ を用いると

$$\tau \sim \frac{1}{\alpha} \left( \frac{c}{\omega_0 a} \right)^2 \frac{1}{\omega_0} \quad (17)$$

という表現が得られる。ここで双極子の振幅 $a$ は原子のサイズ $10^{-10}$ m程度と考えられる。また、 $(c/\omega_0)$ は放射の波長 $\lambda$ の程度になることも、注目すべきことである。この結果から、励起状態の寿命と、その際の放射の振動周期、という同一現象にかかわる同次元の量が、その大きさが大きく異なることを次のようにとらえることができる。励起状態では、微細構造定数が1より小さいことと、放射の波長が原子サイズより長いことの二乗分の積くらい、放射される電磁波の振動周期 $(1/\omega)$ よりも寿命が長くなる、ということが(17)式で示された、ということである。また、単純に寿命と放射の振動数に着目すれば、励起寿命は量子遷移の放射の周波数の3乗に反比例する、ということも見て取れる。

放射が可視光( $\omega \sim 3 \times 10^{15}$ ,  $\lambda \sim 600$ nm)の場合には $\tau \sim 137 \times 600^2 / 3 \times 10^{15} \sim 2 \times 10^{-8}$ sから、原子サイズの振動で遷移が電気双極子放射によるものなら、寿命は数十ナノ秒程度になることが分かる。これは実際、多くの原子の励起状態の寿命をよく表しているが、禁制遷移と呼ばれる、はるかに長い寿命をもたらす量子遷移はこれでは

理解できない。また、この評価法がマイクロ波領域でも適切であるなら、周波数が低いことから長い寿命が予想されるが、これについては更に別の効果に依存している部分が多い。

時間、周波数の定義に使われているような超微細構造遷移は磁気双極子遷移であり、電気双極子遷移より更に長寿命になっている。また、禁制遷移とよばれる遷移もまた、原子構造の対称性などから電気双極子が生じないが、電気四重極子や磁気双極子によって量子遷移を起こしている。これらの遷移によって、励起状態の寿命が電気双極子より長くなることの古典的なイメージは次のように考えられる。

電気四重極子、磁気双極子は電気双極子をもとに構成できる。図4のように、同一軸上に二つの反対向きの振動する電気双極子が原子サイズ  $a$  だけ離れて配置されると電子双極子振動はキャンセルされ、電気四重極子振動が生じる。また、図5のように四つの電気双極子が正方形の各辺に配置されることで電気双極子も電気四重極子もキャンセルされたリング状の振動電流、すなわち磁気双極子振動が作り出される。

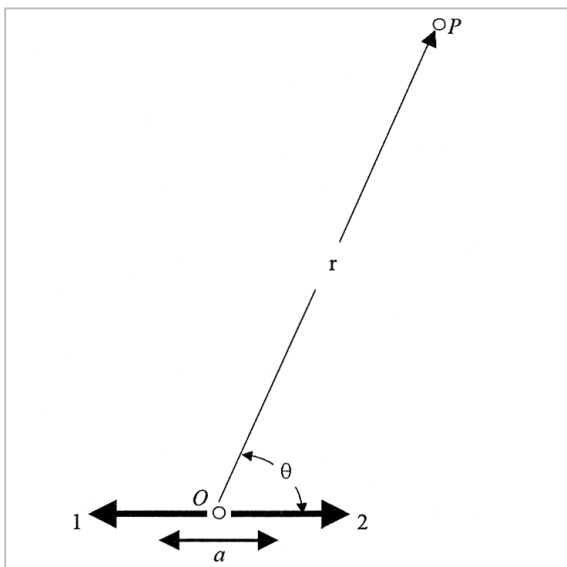


図4 二つの電気双極子振動から作られる電気四重極子振動

広がり原子サイズ  $a$  の程度。電気双極子1と2が双極子能率を打ち消し合うが四重極子能率は方向に応じてキャンセルされずに残る。

このような場合に、組をなしている電気双極子の電磁場はどちらからも等距離となる特別な

方向以外には完全には電磁波は相殺せず、弱い電磁場が残ることになる。例えば図4で  $x$  軸上、 $r$  だけ離れた点では  $y$  軸に平行な二つの電気双極子のうち手前のものが作る電場を

$$E_1 = A(r - a/2)e^{i\omega\left(t - \frac{r-a/2}{c}\right)} \quad (18)$$

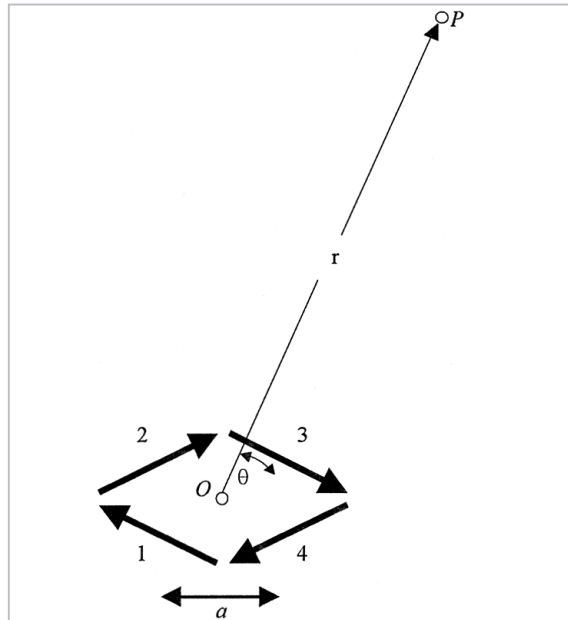


図5 四つの電気双極子振動から作られる磁気双極子振動

広がり原子サイズ  $a$  の程度。電気双極子の振動コイルに交流電流を流したような効果を生む。向かい合った例えば1と3の電気双極子同士がつくる磁場は、方向に応じてキャンセルされずに残る。

とする。遠い側は中心から見て逆位相の振動であるので

$$E_1 = -A(r + a/2)e^{i\omega\left(t - \frac{r+a/2}{c}\right)} \quad (19)$$

振幅  $A(r)$  は十分遠方から見ると  $\pm a/2$  の違いは無視できるが、位相差は消えることはない。この二つの電場を重ね合わせることにより

$$E_2 \sim i \frac{a\omega}{c} E_1, \quad (20)$$

が得られる。磁気双極子振動でも、向かい合った組になる電気双極子振動がやはり電磁場を打ち消し合うことは同様である。つまり電気四重極子や、磁気双極子の振動で生じる電場は、放射電磁波の波長が原子のサイズに比べて長くな



ればなるほど電気双極子の要素の組同士で互いに打ち消し合う割合が大きくなり、電気双極子の振動によって生じる場合の $\left(\frac{a\omega}{c}\right)$ 程度の小さなものになる。放射エネルギーは $E^2$ に比例するので電気四重極子、磁気双極子では電子双極子に比べおよそ $\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2$ 程度放射エネルギーが小さくなる分、寿命が長くなると考えられる。原子の構造の対称性などから電気双極子遷移が起きない場合に、電気四重極子、磁気双極子相互作用によって遷移を起こす禁制遷移が、非常に長寿命となることから理解できよう。光領域では $\left(\frac{a\omega}{c}\right) \sim 10^{-3}$ となるので、この効果により6～7桁寿命が延び、禁制遷移による励起の寿命が1秒近くにまで長くなる。この比はマイクロ波では $\left(\frac{a\omega}{c}\right) \sim 10^7$ となるので、磁気双極子では更に14～15桁寿命が延びると推定される。このような半古典的な解析から、超微細構造のマイクロ波領域での磁気双極子遷移は、まったく外乱がなければその寿命は宇宙年齢( $\sim 10^{17}$ 秒)を越える、という結果が得られる。

#### 4 Cs原子のスペクトルとラムゼー共鳴

現在の秒の定義に使われているセシウム原子の超微細構造遷移の輻射の周波数は、多くの原子時計やすべての一次周波数標準器ではラムゼー共鳴という現象を用いて計測されている。また、セシウム原子の場合に限らず、ラムゼー共鳴は量子遷移の周波数の精密測定のためには欠かせない重要な技術である。

具体的な共鳴の起こし方の手順は以下のようなものである。準位の縮退を解くためにC磁場と呼ばれる定常磁場をかけて、原子の状態をある準位にそろえる。この状態で電磁波を時間 $\tau$ だけ照射し、 $T$ の時間だけ待って、再び電磁波を時間 $\tau$ だけ照射する。このように2回に分けて原子と電磁波との相互作用をさせると、原子が他の状態に遷移する確率は実際に相互作用する時間 $\tau$ ばかりではなく、2回の相互作用の間の時間 $T$ にも依存する干渉項のようなものが得られ、量子遷移の起こり方が非常に周波数変化に敏感になることが示される。これがラムゼー共鳴である。この現象を利用することにより、高い精度

で遷移の中心周波数を測定することができる。

やや複雑な計算を行う前に、見通しを得るため結果を先に述べてしまうと、ラムゼー共鳴のプロセスの後に、原子が量子遷移している確率 $P$ は次のような形で表される。

$$P(\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 b \tau [1 + \cos(\omega - \omega_0)T] \quad (21)$$

ここで $\omega$ は照射電磁波の周波数、 $\omega_0$ はエネルギー準位の差から求められる遷移の放射の中心周波数であり、 $b$ は照射電磁波の強度から決まる量で、これは $\mu_B$ をボーア磁子、 $B$ を磁束密度とすると

$$b = \frac{\mu_B B}{\hbar} \quad (22)$$

と表されるものである。(21)式で遷移確率 $P$ の半値周波数全幅は

$$\Delta\nu_0 = \frac{1}{2T} \quad (23)$$

となる。このように、2回の電磁波照射による相互作用の間の時間を長く取ることによって、遷移が起きる周波数範囲を非常に狭くすることができることが分かる。ただし(21)式は非常に単純化された場合の表式であり、これは

$$|\omega - \omega_0| \ll b \quad (24)$$

という条件が成り立つときのみ得られる、ということも注意する必要がある。この条件は原子を飛ばし、異なる場所で電磁波を照射する熱ビーム型においては照射領域を $l$ 、照射領域間の間隔を $L$ とすると、 $T/\tau = L/l$ などの関係式や(23)を用いて、

$$\frac{|\nu - \nu_0|}{\Delta\nu_0} \ll \frac{L b \tau}{l \pi} \quad (25)$$

というようにも表される。ここでは、この単純化の条件が成り立つような場合のみを考えることにする。

ラムゼー共鳴の導出には幾つか方法があり、密度行列を用いる方法がよく知られている[2]が、より直接的で、ある意味では明快と思われる、シュレディンガー方程式をそのまま解くやり方[4]を以下に示す。

超微細構造遷移の記述は、ほぼエネルギーの固有状態に弱い相互作用の加わった二準位モデルで記述できる。特にセシウム133原子のクロック遷移に対しては、適当なC磁場をかけ、方向を合わせた電磁波を相互作用させたとすれば、基底状態の $F=4, m_F=0$ と、 $F=3, m_F=0$ の二つの状態間の遷移のみを考え、他の状態へは遷移しない、と考えて差し支えない。ここで $F=4, m_F=0$ の状態を $|\psi_1\rangle$ 、他方を $|\psi_2\rangle$ と表すと、一般の量子状態は二つの状態の重ね合わせとして、次のような状態関数で書ける。

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad (26)$$

ここで $c_1, c_2$ は規格化された重ね合わせの係数である。また、状態を二つに限ることにより、状態空間は二次元に単純化できて、次のように表すことができる。

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$F=4, m_F=0$ と、 $F=3, m_F=0$ の二つの状態に対し、この二次元空間で対角化された非摂動のハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

と表される。これに対し、マイクロ波との相互作用による非対角の摂動ハミルトニアンは

$$H_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2b \cos \omega t \\ 2b \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

と表される。この二つを足し合わせたものが、電磁波と相互作用する原子のハミルトニアン $H$ となる。これを用いたシュレディンガー方程式は次のようになる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (30)$$

これに上記の状態関数を代入し、展開すると、重ね合わせの係数に対する次のような方程式が得られる。

$$i \frac{dc_1}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} c_1 + \frac{b}{2} [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] c_2 \quad (31)$$

$$i \frac{dc_2}{dt} = \frac{b}{2} [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)] c_1 + \frac{\omega_0}{2} c_2 \quad (32)$$

この方程式を解いて、 $c_1, c_2$ の時間依存性が得られれば、遷移確率が計算できることになる。この方程式を解く際に注意すべきこととして、原子にとって時間の経過は、 $H_0$ にかかわる通常の意味の時間経過と、 $H_1$ にかかわる、電磁波との相互作用の経過時間とを区別して考える必要がある。前者を $t$ 、後者を $\theta$ とすると、今の場合に適した時間微分の表現は以下のように書ける。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (33)$$

これに対応し、 $c_1, c_2$ も $t$ に依存する部分と $\theta$ に依存する部分に分けて考えることができる。今の場合は特に、 $t$ に依存する部分はエネルギー固有状態に対応する部分と考えられるので、 $\exp(\pm i\omega t/2)$ と表され、これに $\theta$ の関数として摂動部分の項がかかっていると考えられる。これを $\gamma_1, \gamma_2$ とすると、 $c_1, c_2$ は以下のように書き直せる。

$$c_1(t, \theta) = \gamma_1(\theta) \exp \frac{i\omega t}{2} \quad (34)$$

$$c_2(t, \theta) = \gamma_2(\theta) \exp \left( -\frac{i\omega t}{2} \right) \quad (35)$$

これを方程式(31)、(32)に代入すると次のような $\gamma_1, \gamma_2$ に対する方程式が得られる。

$$i \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} = \frac{\Omega_0}{2} \gamma_1 + \frac{b}{2} \gamma_2 \quad (36)$$

$$i \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} = \frac{b}{2} \gamma_1 - \frac{\Omega_0}{2} \gamma_2 \quad (37)$$

ここで $\Omega_0$ は以下で定義される量である。

$$\Omega_0 = \omega - \omega_0 \quad (38)$$

また、(36)、(37)式においては、角周波数 $2\omega$ に依存する項は無視する近似をとった。厳密な扱いでは、この項は解に $2\omega$ の高周波項をもたらすが、その振幅は無視し得る程度であることが分かる。この項を省略することで、以下に示すように扱いは非常に単純になる。

(34)、(35)式より系の状態は $\gamma_1, \gamma_2$ で表されることになる。この系の $\theta$ の間の時間発展を行列



形式で表すと、形式的には次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\theta + \theta_0) \\ \gamma_2(\theta + \theta_0) \end{pmatrix} = M^{(k)}(\theta) \begin{pmatrix} \gamma_1(\theta_0) \\ \gamma_2(\theta_0) \end{pmatrix} \quad (39)$$

ここで行列  $M^{(k)}(\theta)$  は (36)、(37) 式の解として得られるものである。 $M^{(k)}(\theta)$  の右肩の添え字  $k$  は相互作用のステップを表している。今節の最初に述べたように、ラムゼー共鳴は、電磁波を時間  $\tau$  だけ照射、電磁波を切って時間  $T$  だけ待ち、再び電磁波を時間  $\tau$  だけ照射、という3ステップを経て観測されるので、 $k$  は1~3を取る。我々は今、電磁波との相互作用がある場合には (24) 式の近似が成り立っている、という仮定で考えていることを思い出そう。すると  $k=1$  と  $k=3$  の時は (36)、(37) 式は

$$i \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

というように近似される。この解は行列表現では

$$M^{(1)}(\theta) = M^{(3)}(\theta) = \exp -i \begin{pmatrix} 0 & \frac{b\theta}{2} \\ \frac{b\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

というように表されるが、

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

を用いてべき級数展開の奇数次と偶数次に分けて整理すると

$$M^{(1)} = M^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{b\tau}{2} & -i \sin \frac{b\tau}{2} \\ -i \sin \frac{b\tau}{2} & \cos \frac{b\tau}{2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

が得られる。また、 $k=2$  の場合に対しては、電磁波はかかっていないため  $b=0$  であり、(36)、(37) 式は

$$i \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_0}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\Omega_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

となる。対角行列はすぐに積分できて、この解は次のようになることが分かる。

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} \exp -\frac{i\Omega_0 T}{2} & 0 \\ 0 & \exp \frac{i\Omega_0 T}{2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

以上の結果を用いると、初期状態が  $c_1=1, c_2=0$  というように状態選別されていたとして、時間  $\tau$  の間電磁波を照射、電磁波を切って時間  $T$  だけ待ち、再び電磁波を時間  $\tau$  照射した場合にどのような状態になるかは

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\tau+T+\tau) \\ \gamma_2(\tau+T+\tau) \end{pmatrix} = M^{(3)}(\tau) M^{(2)}(T) M^{(1)}(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

というように計算できるが、(43)、(45) の結果を代入すると、次の結果が得られる。

$$\gamma_2(\tau+T+\tau) = -i \sin b\tau \cos \frac{\Omega_0 T}{2} \quad (47)$$

これを用いると

$$P(\tau) = |\gamma_2(\tau+T+\tau)|^2 \quad (48)$$

より、先に述べたとおりの

$$P(\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 b\tau (1 + \cos \Omega_0 T) \quad (49)$$

が得られる。以上で示されたように、エネルギー準位に対応する対角ハミルトニアンと、非対角の弱い摂動項がある場合、原子の状態をそろえておいて、時間を置いて2回に分けて摂動を加えることはその時間間隔と、摂動周波数と共鳴周波数の差との積に比例する位相変化の項を生じる。これがラムゼー共鳴であり、摂動を加える時間間隔を長くすることによって摂動周波数と共鳴周波数の差を非常に高感度に測定することが可能になる。

(49) で得られた結果は、(24) 式の近似のもとでのみ成り立つものであり、摂動周波数と共鳴周波数の差が大きくなっていくと徐々に違ってくる。また、実際の、様々な速度を持つ原子の集合としての原子ビームでは、遷移確率は

$$P = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\tau) \sin^2 b\tau [1 + \cos(\omega - \omega_0)T] d\tau \quad (50)$$

というように表される。ここで  $f(\tau)$  は規格化された原子の相互作用時間を表しており、熱ビー

ム型標準器においては、速度分布関数  $p(v)$  が与えられれば、 $v=l/\tau$  であることに注意し、

$$f(\tau) = \frac{l}{\tau^2} P\left(\frac{l}{\tau}\right) \quad (51)$$

と表される。このように実際に観測されるラムゼー共鳴信号は、様々な原因で  $\omega$  が  $\omega_0$  にごく近いところ以外では(49)式からはずれたものになる。当所の光励起型一次周波数標準器 CRL-O1 で得られている実際のラムゼー共鳴信号を図6に示す。

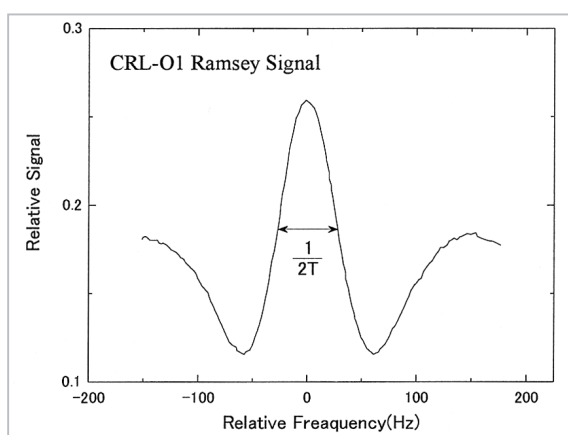


図6 光励起型一次周波数標準器 CRL-O1 で得られたラムゼー共鳴信号

周波数差が半値幅を越えたあたりから、正弦振動からはだいぶずれた形になっていく。

## 5 結論

原子周波数標準器は、時間と周波数という量に対し、14桁から15桁の有効数字での計測を可能にする、最も精密な計測装置の一つである。その動作原理は電磁気学と量子力学をはじめとする、非常に精緻な現代物理に基づいている。それら現代物理で理解されてきた諸現象が、様々な精密かつ厳密な検証に耐えて信頼を得てきたことが原子周波数標準器の高精度につながっていることを改めて感じる。それを理解するための、ごく初歩的な物理の一部について述べてきた。

ここで取り上げられた話題は、原子のエネルギー準位、量子遷移における放射と寿命、ラムゼー共鳴、というごく限られたものであったが、それでも十分な説明ができたとは言いがたい。幾らかでも、直感的な現象の把握とおおよその定量的評価の理解に役立ち、より詳しい書籍に進む際の役に立てれば幸いである。セシウム一次周波数標準器の構造や種々の周波数シフト要因については文献[14]を参照されたい。今回触れられなかった話題や、より進んだ詳しい記述についても、いずれ機会があれば再度取り組んでみたいと思っている。

## 参考文献

- 1 森川容雄, "時間・周波数の定義と国際原子時/協定世界時", 本特集.
- 2 J. Vanier and C. Audoin, "The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards", Adam Hilger, 1986.
- 3 吉村和幸, 古賀保喜, 大浦宣徳, "周波数と時間", 5章, 電子情報通信学会, 1989.
- 4 C.Audoin and B.Guilot, "The Measurement of Time" §6, Cambridge University Press, 2001.
- 5 朝永振一郎著, "量子力学I(第2版)", §8, みすず書房, 1951.
- 6 ディラック, "量子力学", §39, 岩波書店, 1930.
- 7 朝永振一郎, "量子力学II", §42, みすず書房, 1953.
- 8 シッフ, "量子力学(上)", §16, 吉岡書店, 1970.
- 9 Albert Einstein, "Strahlungs-emission und-absorption nach Quantentheorie", Deut. phys. Gessell. Verh., pp318~323, 1916.
- 10 Albert Einstein, "Quantentheorie der Strahlung", Phys.ZS.18, pp.121~128, 1917.
- 11 R.P.Feynman, R.B.Leighton, and M.L.Sands, "ファインマン物理学II", §17-5, 2001.
- 12 E.H.Wichmann, "バークレー物理学コース4量子物理 上", 第3章, 丸善, 1976.
- 13 ランダウ=リフシッツ, "場の古典論", §67, 東京図書, 1978.
- 14 森川容雄, "時系と周波数標準特集号", 通信総合研究所研季報 Vol.45, No.1/2, pp.27-35, 1999.



ほそかわ みずひこ  
細川瑞彦

電磁波計測部門原子周波数標準グループ  
リーダー 理学博士

原子周波数標準、時空計測

【お詫びと訂正】

本論文におきまして、掲載図中に記載の単位に誤植がございました（「2 原子のスペクトルとエネルギー順位」中、35頁右段「図2 セシウム原子のエネルギー順位、微細構造と超微細構造」下方）。図は差し替えております。

（誤）9 192 631 770MHz →（正）9 192 631 770Hz

読者の皆様に謹んでお詫び申し上げます。（2017年10月31日）